Lineares Optimieren mit der Simplex-Methode

Kleine Einführung in eine fundamentale lineare Rechenmethode für die Sortimentsplanung ebenso wie für die Material-, Personal- und Maschineneinsatzrechnung.

Version 3.10 © Harry Zingel 1997-2007, EMail: HZingel@aol.com, Internet: http://www.zingel.de

Inhaltsübersicht

Von den verschiedenen Verfahren zur Lösung von Aufgabenstellungen der Linearen Programmierung ist das bekannteste die Simplex-Methode. Bei dieser wird die gesuchte Optimallösung nicht in einem Schritt gefunden, wie etwa bei der Bestimmung von Extemwerten mittels der Differentialrechnung, sondern sie wird iterativ, d.h. in mehreren Rechenschritten entwickelt. Dieses Verfahren eignet sich besonders zur Implementation auf Computern.

Die folgenden Dateien enthalten numerische Lösungen zu den hier dargestellten Problemen und sollten ggfs. ausprobiert werden:

ABC-Studie.xls ..... Berechnet das Problem mit den drei Produkten aus Kapitel 1.2.
Engpaß.xls ..... Berechnet einfache Engpaß-Aufgaben.
Gauß'scher Algorithmus.xls.xls ..... Berechnet die Gauß'sche Methode (die hier aber nicht vertieft wird).
Simplex Zeichnung.xls ..... Visualisiert das Modell der linearen Beschänkungen für zwei Produkte.
\Excel 97\LPG 1.xls ..... Berechnet ein Simplex-Tableau bis zu 10 Spalten und 6 Zeilen.
\Excel 97\LPG 2.xls ..... Berechnet ein Simplex-Tableau bis zu 18 Spalten und 10 Zeilen.
\Excel 97\LPG 3.xls ..... Berechnet ein Simplex-Tableau bis zu 20 Spalten und 10 Zeilen.

Dateien mit dem Dateityp „.LPG“ enthalten numerische Probleme und können nicht selbständig geöffnet werden, sondern sind nur aus den drei vorstehenden Simplex-Tableaus heraus mit der taste „Open LPG“ zugänglich.

1. Grundgedanken der Sortimentsplanung

1.1. Strategische und taktische Sortimentsplanung

Die Sortimentsplanung ist ein zentrales Problem des Controlling und kann mehrdimensional betrachtet werden:

- Die *langfristige* (*strategische*) *Sortimentsplanung* befaßt sich mit der Produktionsprogrammplanung aufgrund strategischer Trendanalysen. Sie ist ein Element des strategischen Controllings.
- Die *kurzfristige Sortimentsplanung* gehört der taktischen Planung und damit dem operativen Controlling an und möchte das kurzfristige Produktionsergebnis optimieren.

Nur für die taktisch-operative Planung gibt es anwendbare Rechenmethoden. Während die strategische Planung weitgehend auf instinktiven Vorgaben ruht, ist die kurzfristige Planung einer analytischen Optimierung zugänglich.

Dieses Manuskript befaßt sich *ausschließlich mit der operativen Planung*.

1.2. Die Deckungsbeitragsplanung

Grundsätzlich ist die operative Sortimentsplanung ein Problem der *Deckungsbeitragsrechnung*. Sortimentsplanung ist damit *spezielle Teilkostenrechnung*. Der Leser möge nicht vergessen, daß das Primärziel eines Unternehmens zwar die Gewinnerwirtschaftung ist, der Verkauf von Produkten jedoch zunächst die variablen Kosten deckt, und eine Deckung der Fixkosten sich erst am Jahresabschlußstichtag in der Gesamtrechnung ergibt. Taktisches Ziel ist also nicht die kurzfristige Gewinnerzielung, weil keine kurzfristige Gewinnrechnung möglich ist, sondern die kurzfristige Deckungsbeitragsrechnung, weil nur der Deckungsbeitrag kurzfristig und produktbezogen rechenbar ist.

Dies ist eine *außerordentlich wichtige Grundidee*. Wer diesen Gedanken nicht verinnerlicht, kann den Ausführungen dieser Darstellung nicht folgen. Wir verdeutlichen das an einem *Beispiel*. Dieses Beispiel setzt

- die Kostenartenrechnung einschließlich der Unterteilung in fixe und variable sowie in Einzel- und Gemeinkosten sowie
- das Kalkulationsschema

voraus. Die dort zugrundegelegten Elementarkonzepte werden wir an dieser Stelle nicht mehr weiter vertiefen; hierfür gibt es vom Autoren dieses Skriptes das *Lehrbuch der Kosten- und Leistungsrechnung* (ISBN 3-937473-05-X) sowie eine Vielzahl von weiteren Skripten, Materialien, Excel-Dateien und Übungen auf der *BWL CD*.

Ein Unternehmen stelle *drei Produkte* her, die wir als A, B und C bezeichnen wollen. Für diese drei Produkte hat die Geschäftsleitung bisher nur eine Gewinn- und Verlustrechnung; als ein Kostenrechner eine produktspezifische Ergebnisrechnung durchführt, kommt es zu einer *bösen Überraschung* für die Geschäftsleitung:

	A	B	C	Σ
FM	60,00 €	40,00 €	50,00 €	150,00 €
+ MGK 10%	6,00 €	4,00 €	5,00 €	15,00 €
= MK	66,00 €	44,00 €	55,00 €	165,00 €
FL	90,00 €	40,00 €	50,00 €	180,00 €
+ FGK 100%	90,00 €	40,00 €	50,00 €	180,00 €
= FK	180,00 €	80,00 €	100,00 €	360,00 €
Σ = HK	246,00 €	124,00 €	155,00 €	525,00 €
+ VwGK 20%	49,20 €	24,80 €	31,00 €	105,00 €
= SK	295,20 €	148,80 €	186,00 €	630,00 €
./. VK-Erlöse	335,20 €	178,80 €	176,00 €	690,00 €
Btr.-Ergebnis	40,00 €	30,00 €	–10,00 €	60,00 €

Natürlich ist der sofortige Reflex, Produkt C wegen des Verlustes abzuschaffen. Hierbei gibt der Kostenrechner zu bedenken, daß die Gemeinkosten aber zu 90% Fixkosten sind, während die Einzelkosten zu 100% variabel sind (das ist immer so, es gibt keine fixen Einzelkosten). Versteht der Geschäftsführer diesen Hinweis nicht, und schafft er Produkt C ersatzlos ab, so kommt es zu einer *zweiten bösen Überraschung*:

		Σ A+B
FM		100,00 €
+ MGK	14,50%	14,50 €
= MK		114,50 €
FL		130,00 €
+ FGK	134,62%	175,00 €
= FK		305,00 €
Σ = HK		419,50 €
+ VwGK	24,29%	101,90 €
= SK		521,40 €
./. VK-Erlöse		514,00 €
Betr.-Ergebnis		–7,40 €

Ganz offenbar ist es also keine Gute Idee, ein verlusterwirtschaftendes Produkt abzuschaffen. Ganz aus Versehen haben sich auch die *Zuschlagssätze erhöht*. Dies vermindert aber die *Konkurrenzfähigkeit des Unternehmens*. Ein *weiterer Absturz* durch *neue Managementfehler* ist also nicht auszuschließen.

Der hier skizzierte Fehler ist nämlich *außerordentlich häufig*; man bedenke nur, daß A, B und C der Nah-, der Fern- und der Güterverkeht der Bahn sein könnten: schafft man einen dieser Bereiche ab, oder schränkt ihn wegen Verlustes ein, so bleiben die meisten technischen Anlagen (wie z.B. Bahnhöfe, Schienen usw) erhalten und verursachen weiter Kosten – *Fixkosten*. Kann man das aber verallgemeinern?

Betrachten wir hierzu eine *Deckungsbeitragsrechnung*. Der Deckungsbeitrag ist bekanntlich definiert als

$$DB = P_{vk} - K_{\mathrm{var}}$$

Kann man das im vorliegenden Fall anwenden? Berechnen wir zunächst die variablen Kosten des Produktes C:

	$K_{\mathrm{var}}(C)$
var. FM	50,00 €
+ var. MGK	0,50 €

= var. MK	50,50 €
var. FL	50,00 €
+ var. FGK	5,00 €
= var. FK	55,00 €
Σ = var. HK	105,50 €
+ var. VwGK	3,10 €
= var. Kosten	108,60 €

Für den Deckungsbeitrag des Produktes C gilt also:

$$DB_C = P_{vk_C} - K_{var_C} = 176{,}0 - 108{,}6 = 67{,}4$$

Es ist aber kein Zufall, daß der Deckungsbeitrag des Produktes C genau dem Betrag entspricht, um den der Gesamtgewinn des Unternehmens zuvor „abgestürzt" ist. Dies lehrt uns:

Es gibt keine Produkte mit Gewinnen (oder Verlusten). Es gibt nur Produkte mit Deckungsbeiträgen!

Man müßte also im vorstehenden Fall das Produkt C nicht abschaffen, sondern erweitern, weil es seinen *Break Even Punkt* noch nicht erreicht hat.

Diesen Gedanken kann man aber fortführen, denn falls es ein anderes Produkt mit höherem Deckungsbeitrag gibt könnte es Sinn machen, Produkt C zwar abzuschaffen, dafür aber ein anderes Produkt zu erweitern. Hierfür vergleichen wir mal die Deckungsbeiträge der drei Artikel:

	A	B	C
var. FM	60,00 €	40,00 €	50,00 €
+ var. MGK	0,60 €	0,40 €	0,50 €
= var. MK	60,60 €	40,40 €	55,00 €
var. FL	90,00 €	40,00 €	50,00 €
+ var. FGK	9,00 €	4,00 €	5,00 €
= FK	99,00 €	44,00 €	55,00 €
Σ = HK	159,60 €	84,40 €	105,50 €
+ VwGK 20%	4,92 €	2,48 €	3,10 €
= SK	164,52 €	86,88 €	108,60 €
./. VK-Erlöse	335,20 €	178,80 €	176,00 €
Deckungsbeitrag	170,68 €	91,92 €	67,40 €

Es könnte sich also anbieten, im Austausch gegen Produkt C Produkt A auszuweiten, weil dieses einen höheren Deckungsbeitrag hat. Hierzu aber muß man weitere Probleme berücksichtigen.

2. Sortimentsplanung mit Deckungsbeiträgen

Das einleitende Beispiel berücksichtigt nicht die Anzahl der Produkte; wir können also nicht sehen, um *wieviel* Produkt C (und vielleicht auch Produkt B) reduziert werden sollten, wenn Produkt A ausgeweitet werden sollte. Hierfür benötigen wir *weitere Annahmen*.

2.1. Sortimentsplanung bei Vorliegen einer Beschränkung

Eine Beschränkung ist eine *Restriktion*, die die *Maximalzahl der herzustellenden Produkte* absolut oder relativ limitiert. Eine Beschränkung bezeichnet man auch als *Engpaß*. Die Rechenmethoden, die sich mit Beschränkungen befassen, heißen daher auch *Engpaßrechnung*.

Beschränkungen können sich *extern* etwa aufgrund von *Marktgegebenenheiten* ergeben (z.B. die Höchstzahl der in einer Zeitperiode zu verkaufenden Produkte), oder intern etwa aufgrund des Produktionsprozesses (z.B. Maximalleistung von Maschinen, technischer Durchsatz eines Prozesses). Auch politisch motivierte Ver- oder Gebote etwa im Umwelt-, Arbeits- oder Gewerberecht sind eigentlich nichts anderes als produktionstheoretische Beschränkungen.

Wir betrachten zunächst die Sortimentsplanung bei Vorliegen nur einer einzigen Restriktion. Später versuchen wir uns dann an Problemen mit mehreren simultan wirksamen Restriktionen.

Aus dem Grundgedanken der Sortimentsoptimierung abgeleitet werden, daß relative Deckungsbeiträge engpaßbezogen zu optimieren sind. Sortimentsrechnung ist ein *Anwendungsfall der Deckungsbeitragsrechnung*.

Betrachten wir ein *Beispiel*. Für drei Produkte (A, B und C) liegen die folgenden kaufmännischen Daten vor:

Produkt:	A	B	C	
Verkaufspreis:	160	100	80	€/Stück
Var. Stückkosten:	60	50	40	€/Stück
Absatzmenge:	40	90	300	Stück/Tag
Arbeitszeitverbrauch:	8	2	1	Min/Stück

Pro Tag stehen 480 Arbeitsminuten zur Verfügung.

Hier liegen zwei Typen von Beschränkungen vor:

- Beschränkungen, die nur auf ein einziges Produkt wirken (Absatzhöchstmengen) heißen *singuläre Restriktionen*;
- Beschränkungen, die auf mehrere Produkte gleichzeitig wirken (Zeitverfügbarkeit), heißen *interdependente Restriktionen*.

Nur eine interdependente Restriktion ist ein echter Engpaß. Hier liegt also immer noch ein Problem mit nur einer „echten" Restriktion vor.

Eine Planung nach Deckungsbeiträgen würde folgendermaßen aussehen:

Produkt:	A	B	C	
Deckungsbeitrag:	100	50	40	€/Stück
Sortimentsreihenfolge:	1.	2.	3.	(Rang)

Daraus ergäbe sich die folgende Sortimentsreihenfolge:

Rang:	1.	2.	3.	
Produkt:	A	B	C	
Menge:	40	80	0	Stück
Verbrauch:	320	160	0	Minuten
DB:	4000	4000	0	€

Insgesamt würde also ein Deckungsbeitrag von 8.000 € erzielbar sein. In diesem durchsichtig gewählten Beispiel ist offensichtlich, daß eine Planung nach relativem Deckungsbeitrag eine drastische Verbesserung des Ergebnisses erbringen würde. Der relative Deckungsbeitrag ist der

Deckungsbeitrag dividiert durch den Verbrauch:

Produkt:	A	B	C	
Deckungsbeitrag:	100	50	40	€/Stück
Arbeitszeitverbrauch:	8	2	1	Min/Stück
DB/Zeitverbrauch:	12,5	25	40	€/Min
Sortimentsreihenfolge:	3.	2.	1.	(Rang)

Die Planung nach dem relativen Deckungsbeitrag würde folgendermaßen aussehen:

Rang:	1.	2.	3.	
Produkt:	C	B	A	
Menge:	300	90	0	Stück
Verbrauch:	300	180	0	Minuten
DB:	12000	4500	0	€

Nur durch die Änderung des Planungskriteriums wird also ein Deckungsbeitrag von 16.500 € möglich. Die hier angewandte Rechenvorschrift läßt sich so zusammenfassen:

1. Für alle Produkte die absoluten und relativen Deckungsbeiträge berechnen;
2. mit dem Produkt mit dem max. relativen DB beginnen;
3. von diesem Produkt so viel fertigen, wie nach Absatzhöchstmenge und interdependenter Restriktion möglich ist;
3. das nächstbeste Produkt wählen und mit 3. fortfahren bis die interdependente Ressource verbraucht ist.

2.2. Sortimentsplanung bei Vorliegen mehrerer Beschränkungen

In der Praxis stehen oft mehrere Restriktionen gleichzeitig zu beachten. Wenn wir das vorliegdne Beispiel etwa um einen Rohstoffverbrauch erweitern, der absolut knapp ist, also eine zweite interdependente Restriktion einführen, wäre die einfache Rechenmethode der Engpaßrechnung *nicht mehr anwendbar*.

Eindimensionale Engpaßrechnung für vier Produkte

Produktionsprogrammplanung bei Vorliegen einer interdependenten Restriktion

Version 1.2 © H. Zingel 1999 - EMail: HZingel@aol.com - Internet: http://www.zingel.de

	Produkt A	**Produkt B**	**Produkt C**	**Produkt D**	Summe
Verkaufspreis:	120,00 €/Stück	60,00 €/Stück	90,00 €/Stück	75,00 €/Stück	
variable Kosten:	80,00 €/Stück	30,00 €/Stück	80,00 €/Stück	50,00 €/Stück	
Verbrauch:	20,00 Einh/St	4,00 Einh/St	1,00 Einh/St	5,00 Einh/St	1200,00 Einh
Kapazität:	50,00 Stück	40,00 Stück	1000,00 Stück	20,00 Stück	
Fixkosten des Gesamtbetriebes pro Periode außerhalb der Verbrauchs- und sonstigen Produktionskosten:					5.200,00 €

Auswertung nach Deckungsbeitrag:

Deckungsbeitrag:	40,00 €	30,00 €	10,00 €	25,00 €	
Reihenfolge:	**1.**	**2.**	4.	**3.**	
Verfügbare Ressource:	1200,00 Einh	200,00 Einh	0,00 Einh	40,00 Einh	
Produktionsmenge:	50,00 Stück	40,00 Stück	0,00 Stück	8,00 Stück	
Verbrauch:	1000,00 Einh	160,00 Einh	0,00 Einh	40,00 Einh	
Deckungsbeitrag:	2.000,00 €	1.200,00 €	0,00 €	200,00 €	3.400,00 €

Auswertung nach relativem Deckungsbeitrag:

Relativer Deckungsbeitrag:	2,00 €	7,50 €	10,00 €	5,00 €	
Reihenfolge:	4.	**2.**	**1.**	**3.**	
Verfügbare Ressource:	0,00 Einh	200,00 Einh	1200,00 Einh	40,00 Einh	
Produktionsmenge:	0,00 Stück	40,00 Stück	1000,00 Stück	8,00 Stück	
Verbrauch:	0,00 Einh	160,00 Einh	1000,00 Einh	40,00 Einh	
Deckungsbeitrag:	0,00 €	1.200,00 €	10.000,00 €	200,00 €	11.400,00 €

Die Planung nach relativem Deckungsbeitrag verschafft einen Vorteil von 8000 €

Technische Auswertung:

Gesamtbedarf:	1000,00 Einh	160,00 Einh	1000,00 Einh	100,00 Einh	2260,00 Einh
Verbrauch DB-Planung:	1000,00 Einh	160,00 Einh	0,00 Einh	40,00 Einh	1200,00 Einh
Kapazitätsauslastung:	100,00%	100,00%	0,00%	40,00%	
Verbrauch rel. DB-Planung:	0,00 Einh	160,00 Einh	1000,00 Einh	40,00 Einh	1200,00 Einh
Kapazitätsauslastung:	0,00%	100,00%	100,00%	40,00%	

Betriebswirtschaftliche Auswertung:

Umsatz bei DB-Planung:	6.000,00 €	2.400,00 €	0,00 €	600,00 €	9.000,00 €
Umsatz bei rel. DB-Planung:	0,00 €	2.400,00 €	90.000,00 €	600,00 €	93.000,00 €
Var. Kosten DB-Planung:	4.000,00 €	1.200,00 €	0,00 €	400,00 €	5.600,00 €
Var. Kosten rel. DB-Plng:	0,00 €	1.200,00 €	80.000,00 €	400,00 €	81.600,00 €
DB bei DB-Planung:	2.000,00 €	1.200,00 €	0,00 €	200,00 €	3.400,00 €
DB bei rel. DB-Planung:	0,00 €	1.200,00 €	10.000,00 €	200,00 €	11.400,00 €
Gewinn bei DB-Planung:					-1.800,00 €
Umsatzrentabilität bei DB-Planung:					-20,0000%
Gewinn bei relativer DB-Planung:					6.200,00 €
Umsatzrentabilität bei relativer DB-Planung:					6,6667%

Für diesen Fall ist nur noch die *Simplex-Methode* als Lösungsweg gangbar. Betrachten wir auch hier ein allerdings wesentlich aufwendigeres Beispiel:

Ein Hersteller habe die Alternative, von einem Produkt *zwei Varianten* herstellen zu können, die wir als Typ 1 und Typ 2 bezeichnen wollen. Für beide Produktvarianten werden zwar die gleichen Roh- Hilfs- und Betriebsstoffe benötigt, aber nicht in gleicher Menge. Ferner sind die durch Verkauf der beiden Produktvarianten am Markt zu erzielenden Stück-Deckungsbeiträge unterschiedlich:

	Typ 1	Typ 2	Vorrat
Verbrauch 1:	2 Kg	1 Kg	200 Kg
Verbrauch 2:	1 Kg	1 Kg	120 Kg
Verbrauch 2:	1 Kg	3 Kg	240 Kg
Stückdeckungsbeitrag:	2 €	3 €	→ Max!

Es kann *jede beliebige Kombination* beider Produkte hergestellt werden, nur eines der beiden Produkte oder es kann auch überhaupt nicht produziert werden. Je mehr jedoch an Rohstoffen durch die Produktion eines der beiden Produkte verbraucht wird, desto weniger Ressourcen stehen noch zur Herstellung der anderen Produktvariante zur Verfügung. Die Vorratsbeschränkung ist also eine *interdependente Restriktion*.

Ziel ist es, diejenige Produktkombination herauszufinden, bei der der Gesamt-Deckungsbeitrag, der durch Verkauf aller hergestellten Produkte erzielt werden kann, maximal ist (DB → Max!).

2.2.1. Die einfache graphische Lösung

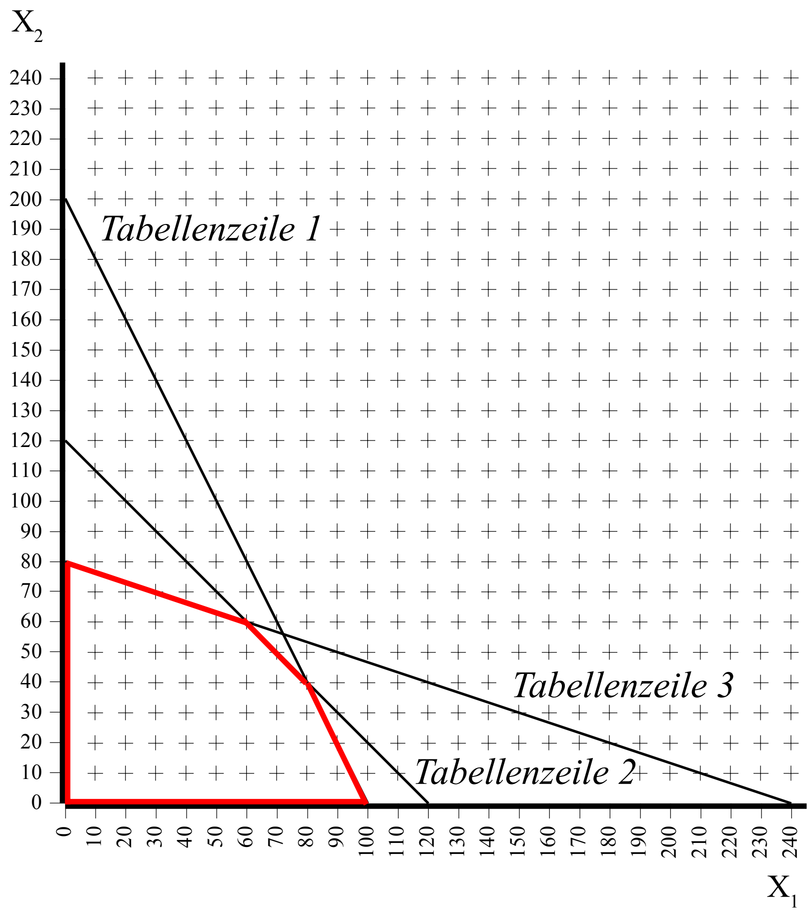
Um sich das Problem zu veranschaulichen, kann man es *graphisch darstellen*, solange es nur zwei Produkte, also zwei Variablen umfaßt. Probleme mit drei Produkten ließen sich noch als Körper im Raum visualisieren und solche mit mehr als drei Produkten sind nicht mehr anschaulich darzustellen.

Die graphische Darstellung enthält die Anzahl der herzustellenden Produkte vom Typ 1 als Variable X_1 auf der horizontalen Achse. Die Anzahl der vom Typ 2 zu produzierenden Exemplare ist als Variable X_2 auf der vertikalen Achse dargestellt.

Wir betrachten nunmehr jede Zeile der nebenstehenden Tabelle einzeln.

Der erste Vorrat von 200 Kg erlaubte uns bei einem Verbrauch von 2 Kg/Stück genau 100 Stück vom Typ 1 zu erzeugen, wenn wir nur die erste Zeile betrachten wollen und keine Exemplare vom Typ 2 produziert werden sollen. Wollte man hingegen ausschließlich Produkte vom Typ 2 produzieren, und keine vom Typ 1, so erhielten wir 200 Stück, weil der Verbrauch je Stück Typ 2 nur 1 Kg beträgt.

Dieser Sachverhalt kann in der Graphik als Linie eingezeichnet werden, die von „X_1 = 100 und X_2 =0“ (*unten*) bis zu „X_1 = 0 und X_2 = 200“ (*oben*) geht. Diese Linie müßte eigentlich eine Treppenlinie sein, denn für je zwei Produkte Typ 2, die nicht gefertigt werden, kann ein Stück Typ 1 hergestellt werden. Aus Vereinfachungsgründen ist sie jedoch als Gerade „Tabellenzeile 1“ dargestellt.



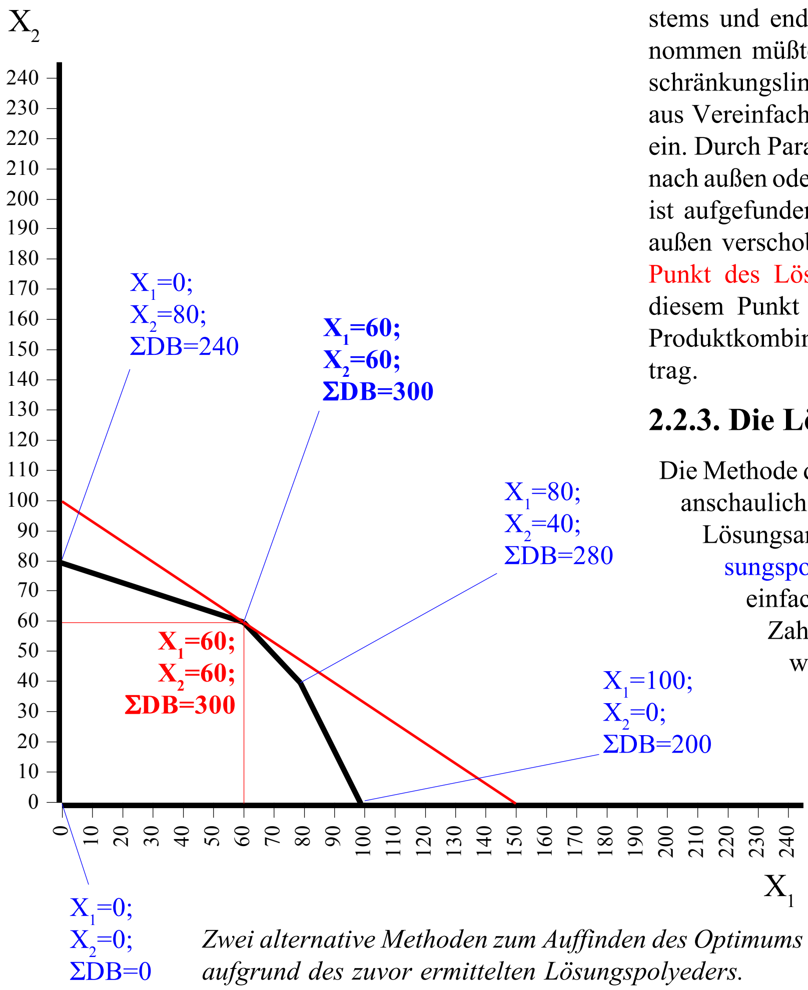
Ebenso verfahren wir nun mit den anderen beiden Tabellenzeilen:

Da der zweite Verbrauch je Produkt stets 1 Kg beträgt, und der Vorrat 120 kg, können wir für die zweite Beschränkung eine Linie von 120 Stück 1 nach 120 Stück 2 einzeichnen, die aus Vereinfachungsgründen ebenfalls als Gerade dargestellt wird.

Die dritte Beschränkung schließlich ergibt eine Linie, die bei „X_1 = 240 und X_2 =0“ (*unten*) beginnd und bis zu „X_1 = 0 und X_2 = 80“ (*oben*) geht.

Auf diese Art bildet jede Linie eine Zeile der Tabelle ab. Der Deckungsbeitrag kommt in dieser Phase der Darstellung jedoch noch nicht vor.

Markiert man die Fläche, die unter allen eingezeichneten Linien zugleich liegt, dann erhält man den sogenannten Lösungspolyeder. Diese Fläche beschreibt alle zulässigen Lösungen. Der Lösungspolyeder beginnt immer bei null, weil nicht Produzieren immer möglich ist, und wird durch die Linien begrenzt.



Zwei alternative Methoden zum Auffinden des Optimums aufgrund des zuvor ermittelten Lösungspolyeders.

Im vorstehenden Beispiel wird der Lösungspolyeder durch jede einzelne der Beschränkungsgeraden determiniert. Alle Beschränkungen sind daher *aktiv*, d.h., ändert sich eine der Beschränkungen, dann ändert sich auch der Lösungspolyeder.

Es wäre jedoch auch möglich, daß Beschränkungen keine Berührung mit dem Lösungspolyeder haben. Ändert man solche Beschränkungen, dann führt das nicht unmittelbar zu einer Veränderung des Lösungspolyeders. Man spricht in diesem Fall von sogenannten *passiven Beschränkungen*.

Dies ist zugleich ein *Ansatz zur Optimierung der dem Problem zugrundeliegenden Bedingungen*: Werden zuerst die aktiven Beschränkungen erweitert, d.h., die diesbezüglichen Ressourcen erhöht und Maschinenleistungen verbessert, dann ist am ehesten eine Verbesserung des Gesamtergebnisses durch eine Vergrößerung des Lösungspolyeders zu erwarten.

Der Lösungspolyeder erlaubt *zwei graphische Lösungsverfahren*, die oben demonstriert werden.

2.2.2. Die Lösung mit der Isogewinnlinie

Eine Isogewinnlinie ist eine Linie, die auf jedem einzelnen Punkt *einen gleichen Gewinn* oder (in diesem Fall) Deckungsbeitrag *vermittelt*. Da mehrere Produktkombinationen gleiche Gewinne oder Deckungsbeiträge vermitteln, beginnt die Isogewinnlinie stets an einer Achse des Systems und endet an der gegenüberliegenden. Strenggenommen müßte die Isogewinnlinie ebenso wie die Beschränkungslinien eigentlich eine Treppenlinie sein, aber aus Vereinfachungsgründen zeichnen wir sie als Gerade ein. Durch Parallelverschiebung kann die Isogewinnlinie nach außen oder innen verschoben werden. Das Optimum ist aufgefunden, wenn die Isogewinnlinie so weit nach außen verschoben wird, daß sie den letzten (äußersten) Punkt des Lösungspolyeders erreicht. Lotet man von diesem Punkt auf die beiden Achsen, erhält man die Produktkombination mit dem maximalen Deckungsbeitrag.

2.2.3. Die Lösung mit der Eckenprüfung

Die Methode der Optimierung mit der Isogewinnlinie ist anschaulich, aber relativ komplex. Ein einfacherer Lösungsansatz besteht darin, alle Ecken des Lösungspolyeders zu überprüfen. Das ist zumeist einfacher, weil die Anzahl der Ecken durch die Zahl der aktiven Beschränkungen bestimmt wird, und es oft nur wenige Beschränkungen sind, die das Aussehen des Lösungsvielecks tatsächlich mitbestimmen. Von jeder einzelnen Ecke loten wir dabei wiederum auf beide Achsen und ermitteln den durch die jeweiligen Sortimente vermittelten Gesamtdeckungsbeitrag. Dabei wird aus formalen Gründen bei null begonnen, weil nicht zu produzieren die einzige immer mögliche Lösung ist, und durch Vorliegen negativer Deckungsbeiträge im Lösungsraum das Ergebnis verschlechtert und nicht verbessert werden würde. Aus der Menge der gefundenen Ergebnisse wird einfach das Beste herausgesucht. *Dieses ist das Optimum*.

3. Die Simplex-Methode

Das Simplex-Verfahren verwendet im Prinzip die Methode der Eckenprüfungen. Die einzelnen Zwischenergebnisse entsprechen den dargestellten Eckenergebnissen der zweiten Lösungsmethode, und zwar in der Weise, daß das Simplex-Verfahren immer den „kürzesten Weg“ zum Optimum einschlägt, also mit der geringstemöglichen Zahl von „Eckenprüfungen“ auskommt. Anders als die graphische Lösung eignet sich das Simplex-Verfahren auch für Probleme mit mehr als drei Produkten.

3.1. Das Ungleichungssystem

Um zu dieser mathematischen Lösung zu gelangen, müssen wir zunächst die genannten interdependenten Produktionsbeschränkungen in *Ungleichungen* verwandeln. Je Zeile der Tabelle, d.h., je Gerade in der Graphik ergibt sich eine Ungleichung:

$$2X_1 + X_2 \leq 200$$

Diese Ungleichung sagt, daß der Verbrauch an ersten Rohstoff durch die Produktion des Produktes Typ 1 und der des Typ 2 zusammen *nicht größer als 200 Einheiten* sein darf. Die 2 vor X_1 entspricht dem Verbrauch von 2 Einheiten des ersten Rohstoffes je hergestelltem Typ 1.

Analog bilden wir die Ungleichung den zweiten Rohstoffverbrauch:

$$X_1 + X_2 \leq 120$$

Und schließlich für den dritten Verbrauch:

$$X_1 + 3X_2 \leq 240$$

Für die Anzahl der hergestellten Produkte gilt die sogenannte *Nichtnegativitätsbedingung*:

$$X_1 \geq 0 \text{ und } X_2 \geq 0$$

Diese Bedingung besagt nur, daß die Herstellung negativer Mengen nicht möglich ist. Sie muß aus formalen Grünmden in das Lösungssystem eingeführt werden.

Unser Ziel kann wie folgt definiert werden:

$$DB = 2X_1 + 3X_2$$

Diese Gleichung nennt man auch *Zielfunktion*. Für die Zielfunktion gilt:

$$DB \rightarrow Max!$$

3.2. Umwandlung des Ungleichungssystem in ein Gleichungssystem

Da man mit Ungleichungen nicht rechnen kann, muß das nunmehr gefundene Ungleichungssystem in ein Gleichungssystem verwandelt werden. Bislang beschreibt

$$2X_1 + X_2 \leq 200$$
$$X_1 + X_2 \leq 120$$
$$X_1 + 3X_2 \leq 240$$

das vorliegende Problem. Wir verwandeln dieses lineare Ungleichungssystem in ein Gleichungssystem, indem wir *in jede Ungleichung eine weitere Variable einführen, die den Unterschied zwischen dem tatsächlichen Verbrauch und der vorhandenen Kapazität aufnimmt*. Deieser Unterschied, sozusagen der nicht verbrauchte Rest, heißt auch Schlupf, weshalb man auch von *Schlupfvariablen* spricht:

$$2X_1 + X_2 + Y_1 = 200$$
$$X_1 + X_2 + Y_2 = 120$$
$$X_1 + 3X_2 + Y_3 = 240$$

Um die Schlupfvariablen von den Mengenvariablen des ursprünglichen Gleichungssystems unterscheiden zu können, bezeichnet man sie mit einem *anderen Buchstaben*. Pro Ungleichung benötigt man stets eine Schlupfvariable. Ihre Bedeutung ist in wirtschaftlicher Hinsicht die, daß sie die jeweils von einer zur Verfügung stehenden Ressource die nicht genutzte Kapazität aufnehmen und so das Ungleichungssystem zu einem Gleichungssystem machen.

Es entsteht damit ein Gleichungssystem, das so viele Unbekannte hat, wie es Produkte und Beschränkungen gibt. Hierbei ist es gleichgültig, ob diese Beschränkungen *singulär* sind, also nur auf eines der Produkte wirken, oder *interdependent*, also auf mehrere Produkte zugleich wirken.

3.3. Formale Grundgedanken

Um mit der Simplex-Methode zu rechnen, muß man zunächst eine *grundlegende Konventionen* verinnerlichen. Diese betreffen insbesondere die *Notations- und Darstellungsform* linearer Gleichungssysteme und erscheinen am Anfang willkürlich. Entgegen der sonstigen Übung kann es also Sinn machen, sie als Regeln auswendig zu lernen; man wird später, wenn man ein Verständnis für die Rechenmethode entwickelt hat erkennen, daß keine Regel wirklich willkürlich ist, sondern alle Regeln eine bestimmte Bedeutung und Begründung haben.

3.3.1. Darstellung von Variablen

Eine Variable ist ein benannter Speicherbereich, dem in der Mathematik und der Programmierung mit dem Gleichheitszeichen „=“ ein Wert zugewiesen wird. In der Simplex-Tabelle (dem *Simplex-Tableau*) geschieht dies mit einem *Einheitsvektor*. Dieser ist definiert als eien Spalte, in der alle Zellen eine Null ednthalten, aber genau eine Zelle eine Eins. Die oberste Zeile ist dabei die „Kopfzeile“, die die Variablenbezeichnung enthält. Die „1“ ist gleichsam der „*Zeiger*“ der auf die am rechten Rand stehende Zahl deutet. Die „1“ weist damit die Zahl rechts der Variable zu. „A = 200“ sähe in einer Simplex-Tabelle folgendermaßen aus:

A						Wert
1						200
0						
0						
0						

Mehrere Variablen können den gleichen rechts stehenden Wert „nutzen“. Im Beispiel gilt durch zwei parallele Einheitsvektoren „A = 200“ und „B = 200“:

A	B	C	D			Wert
1	1	1	0			200
0	0	2	1			0
0	0	0	0			
0	0	0	0			

Steht in einer Spalte aber etwas Anderes als ein Einheitsvektor, so wird hierdurch *kein* Wert zugewiesen. Im vorstehenden Beispiel ist das in der dritten Spalte der Fall (die „2“ gehört nicht zum Einheitsvektor). Es gilt daher „C = 0“. Eine Null kann freilich auch durch einen Einheitsvektor einer Variable zugewiesen werden: im Beispiel gilt daher auch „D = 0“.

3.3.2. Die Basislösung

Das Rechenverfahren des Simplex-Algorithmus beginnt mit einer *Basislösung*. *Als Basislösung bezeichnet man jede Lösung, bei der davon ausgegangen wird, daß überhaupt nicht produziert wird.* Die Produktionsmenge null ist die *einzige, immer zulässige Lösung*. Dies ist zugleich der Grund, weshalb der Nullpunkt auch in der Zeichnung immer der Anfangspunkt war. Das Simplexverfahren tastet sich sodann durch sukzessives Ändern des Produktionsprogrammes in diskreten Optimierungsschritten entlang der Ecken des Lösungspolyeders an das Optimum heran. Es tut damit nichts Anderes wie was wir oben mit dem graphischen Lösungsvieleck getan haben. Anders als in unserer Zeichnung, oder in einem möglicherweise zu bauenden dreidimensionalen Modell, kann Simplex sich aber auch in einem *vieldimensionalen Raum* bewegen. Es tut damit etwas, was unsere *Vorstellung übersteigt*.

Die Zielfunktion, die die Deckungsbeitragsmaximierung als Ziel festlegt schreibt man im Rechenschema in folgender Weise:

$$-2X_1 - 3X_2 + DB = 0$$

Das Rechenschema, das man auch als *Simplex-Tableau* bezeichnet, lautet dann wie folgt:

X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	DB	Restriktion
2	1	1	0	0	0	200
1	1	0	1	0	0	120
1	3	0	0	1	0	240
–2	–3	0	0	0	1	0

3.3.3. Interpretation der Basislösung

Den in der ersten Zeile (der sogenannten *Kopfzeile*) des Simplex-Tableaus stehenden Variablen werden Werte zugewiesen, die in der letzten, rechten Spalte stehen. Hierzu verwenden wir die oben dargestellten formalen Konventionen.

Das Mittel der Zuweisung ist also wiederum der *Einheitsvektor*. Die hier bestehenden Einheitsvektoren weisen den Variablen folgende Werte zu:

X_1: .... 0 Stück
X_2: .... 0 Stück

Wir produzieren also *nichts*. Das ist die *einzige immer mögliche Handlungsweise* und damit das *Wesen der Basislösung*.

In der Basislösung ist aber nur $X_1 = 0$ und $X_2 = 0$, weil in den betreffenden Spalten *kein Einheitsvektor* zu finden ist. Nirgendwo steht, was dann aber in die Spalten zu schreiben ist – und die Simplex-Methode schreibt dann die *Verbräuche* in die Spalten mit den Produkten.

Wer nicht arbeitet, verdient aber auch keinen Deckungsbeitrag. Es gilt in der Basislösung also auch:

DB: .... 0 €

Zudem werden *keine Ressourcen verbraucht*. Die Summe der vorhandenen Ressourcen befindet sich also in voller Höhe in den Schlupfvariablen:

Y_1: .... 200 Einheiten
Y_2: .... 120 Einheiten
Y_3: .... 240 Einheiten

Alle Kapazitäten befinden sich also noch in den Schlupfvariablen.

Die letzte Zeile heißt auch *Zielzeile*, weil sich hier die Deckungsbeiträge befinden, die in der ganzen Aktion das Ziel darstellen: sie sollen ja maximiert werden. *Die Deckungsbeiträge sind mit -1 zu multiplizieren, bevor sie in die Zielzeile der Basislösung geschrieben werden.*

Ein positiver Deckungsbeitrag erscheint also als negative Zahl, und ein von Anfang an negativer Deckungsbeitrag als positiver Wert.

Die jeweils vorliegende Lösung ist *solange nicht optimal, wie sich in der Zielzeile des Simplex-Tableaus noch negative Zahlen befinden.*

Das erklärt zugleich, weshalb die Vorzeichen der Deckungsbeiträge zu vertauschen sind: ein Produkt mit negativem Deckungsbeitrag sollte überhaupt nicht hergestellt werden, weil es keinen Break Even Punkt hat. Sein Deckungsbeitrag würde also im Simplex-Tableau als positive Zahl erscheinen, und daher keine Optimierungsrechnung auslösen.

3.4. Funktionsweise des Simplex-Tableaus

Die vorhandene Lösung wird nun dadurch verbessert, daß man eine nicht in der Lösung befindliche Variable gegen eine Lösungsvariable „austauscht“. Im vorliegenden Fall nimmt man im ersten Schritt des Rechenverfahrens, der zu einer verbesserten Lösung führt, die Variable in die Lösung hinein, zu der in der letzten Zeile der größte negative Wert gehört. Dies ist X_2, da der hierzu gehörende negative Wert –3 absolut größer ist als –2. Wirtschaftlich bedeutet dies, daß man zunächst die Variable in die Lösung hineinnimmt, d.h. das Produkt herstellt, für welches sich der größte Stückgewinn ergibt.

Hätte das ursprüngliche Problem nur Produkte mit negativen Deckungsbeiträgen enthalten, dann wäre die Basislösung zugleich die Endlösung, weil es schon jetzt keinen negativen Wert mehr in der Zielzeile mehr gegeben hätte!

Für die ausgewählte, zu X_2 gehörende Spalte hat man nun festzulegen, welche Ordnung der zu erzeugende Einheitsvektor haben soll, d.h., an welcher Stell der Spalte sich die 1 bebfinden soll. Dazu geht man in der Weise vor, daß man für jede Zeile den Wert der letzten Spalte durch die zu X_2 gehörende Zahl dividiert. Die Operation bedeutet wirtschaftlich gesehen, daß man untersucht, wieviel Stück man von X_2 maximal auf jeder Maschine herstellen könnte, wenn man nur dieses Gut herstellte. Man erhält nun:

1. Zeile: $\frac{200}{1} = 200$

2. Zeile: $\frac{120}{1} = 120$

3. Zeile: $\frac{240}{3} = 80$

Da das Produkt auf allen drei Maschinen bearbeitet wird, wird die *maximale insgesamt mögliche Stückzahl* durch den kleinsten der drei Wertde, durch 80, angegeben. Das auf diese Weise in der ausgewählte Element in der dritten Zeile der zweiten Spalte heißt *Pivotelement*.

Wären in der ausgewählten Spalte Nullen oder negative Werte vorgekommen (was nicht der Fall, aber möglich ist), dann hätte die Division für diese Zeilen *unterbleiben* müssen, weil man einerseits durch eine Null nicht dividieren kann und weil andererseits durch einen negativen Verbrauch zu teilen zwar mathematisch möglich aber ökonomisch sinnlos ist.

In der Spalte, die zuvor ausgewählt wurde, soll nunmehr ein Einheitsvektor erzeugt werden; das Pivotelement ist die Stelle, an der die 1 stehen soll.

Hierzu wird zunächst die dritte Zeile mit 1/3 multipliziert, um an der Stelle des Pivotelementes eine 1 zu erhalten. Es ergibt sich:

X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	DB	Restriktion
2	1	1	0	0	0	200
1	1	0	1	0	0	120
$^1/_3$	1	0	0	$^1/_3$	0	80
–2	–3	0	0	0	1	0

Im nächsten Schritt werden geeignete Vielfache der neuen dritten Zeile zur ersten, zweiten und vierten Zeile addiert, so daß die übrigen Elemente der zweiten Spalte null werden. Auf diese Art und Weise entsteht in der 2. Spalte der dort erwünschte Einheitsvektor. Im vorliegenden Fall addiert man das (-1)-fache der dritten Zeile zur ersten Zeile, zur zweiten Zeile und das 3-fache der dritten Zeile zur letzten Zeile. Man erhält auf diese Weise:

X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	DB	Restriktion
$^5/_3$	0	1	0	$-^1/_3$	0	120
$^2/_3$	0	0	1	$-^1/_3$	0	40
$^1/_3$	1	0	0	$^1/_3$	0	80
–1	0	0	0	1	1	240

Dies ist zugleich *die erste verbesserte Lösung*. In der Lösung sind nunmehr die Variablen X_2, Y_1 und Y_2, denn in den zu ihnen gehörigen Spalten stehen jeweils eine 1 und sonst nur Nullen. Es gilt hier:

X_1: .... 0 Stück
X_2: .... 80 Stück

Legt man die Tabelle auf S. 5 zugrunde, so verursacht dies einen Verbrauch von 80 Einheiten des ersten Rohstoffes, 80 Einheiten des zweiten Rohstoffdes und 240 Einheiten des dritten Rohstoffes. Der erzielte Deckungsbeitrag müßte zudem 240 sein, denn pro Exemplar Produkt 2 erzielen wir ja 3 Euro DB. In der Tat gilt:

DB: .... 240 €

Weiterhin finden wir in den Schlupfvariablen:

Y_1: .... 120 Einheiten
Y_2: .... 40 Einheiten

Das paßt zu unserer Erkenntnis, denn wenn wir von den insgesamt vorhandenen 200 Einheiten des ersten Rohstoffes 80 verbrauchen, so bleiben 120 übrig. haben wir aber von den 120 anfänglich vorhandenen Einheiten des 2. Rohstoffes ebenfalls 80 verbraucht, so bleiben 40 übrig. Genau das haben wir in den Schlupfvariablen gefunden.

Da der dritte Rohstoff aber ganz verbraucht wurde, so müßten wir eigentlich in der dritten Schlupfvariable eine Null vorfinden. Genau das ist der Fall:

Y_3: .... 0 Einheiten

Man bedenke, daß in der Spalte dieser Variable sich *kein Einheitsvektor* befindet, was wir ja als Null definiert haben.

Auf diese Art hat das mathematische Verfahren zugleich die *erste Ecke im Lösungspolyeder* bestimmt, die nicht null ist, also tatsächlich einem Produktionsprogramm entspricht. Durch die Regel, von den negativen Zahlen in der Zielzeile stets die kleinste zu wählen, „weiß“ das Verfahren zugleich, in welcher „Richtung“ der Weg zum Optimum am kürzesten ist, d.h., über die *kleinste Zahl von Optimierungsschritten* erreichbar ist.

Da in der letzten Zeile noch negative Werte zu finden sind, ist die vorliegende Lösung noch *keine Optimallösung*.

Die Bestimmung einer weiter verbesserten Lösung geschieht nach dem selben Verfahren wie bis hierher beschrieben. Der einzige negative Wert steht in der Spalte X_1 und beträgt –1. Zu dieser Spalte dividiert man wieder für jede Zeile den Wert der letzten Spalte durch den entsprechenden Wert der ersten Spalte. Man erhält auf diese Weise:

1. Zeile: $\dfrac{120}{\frac{5}{3}} = 72$

2. Zeile: $\dfrac{40}{\frac{2}{3}} = 60$

3. Zeile: $\dfrac{80}{\frac{1}{3}} = 240$

Der kleinste Wert bei der Division ergibt sich jetzt in der 2. Zeile. Es wird also in der ersten Spalte das Element der 2. Zeile ausgewählt (*Pivot-Element*). Durch Anwendung von Zeilenoperationen ist dafür zu sorgen, daß an dieser Stelle eine 1 steht. Dazu muß man offensichtlich die 2. Zeile mit ($^3/_2$) multiplizieren. Man erhält:

X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	DB	Restriktion
$^5/_3$	0	1	0	$-^1/_3$	0	120
1	0	0	$^3/_2$	$-^1/_2$	0	60
$^1/_3$	1	0	0	$^1/_3$	0	80
–1	0	0	0	1	1	240

Um in der ersten Spalte einen Einheitsvektor mit der 1 an der zweiten Stelle zu erzeugen, muß man ebenso offensichtlich das ($-^5/_3$)-fache der zweiten Zeile zur ersten Zeile addieren, das $(-{}^1/_3)$-fache der zweiten Zeile zur dritten Zeile addieren und das 1-fache der zweiten Zeile zur letzten Zeile addieren. Man erhält durch diese Zeilenoperationen die folgende Lösung:

X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	DB	Restriktion
0	0	1	$-{}^5/_2$	${}^1/_2$	0	20
1	0	0	${}^3/_2$	$-{}^1/_2$	0	60
0	1	0	$-{}^1/_2$	${}^1/_2$	0	60
0	0	0	${}^3/_2$	${}^1/_2$	1	300

Dies ist zugleich die *zweite verbesserte Lösung*. Das Rechenverfahren hat uns gesagt, wir sollten beide Produkte produzieren:

X_1: .... 60 Stück
X_2: .... 60 Stück

Die Stückzahl des zweiten Produktes wurde hierbei zugunsten des ersten Produktes im Vergleich zur ersten Lösung um 20 Stück reduziert.

Vom ersten Rohstoff haben wir einen Rest von 20 Einheiten, aber die beiden anderen Rohstoffe sind ganz verbraucht:

Y_1: .... 20 Stück
Y_2: .... 0 Stück
Y_3: .... 0 Stück

Dies ist konsistent mit dem Verbauch, den wir aus der Tabelle auf S. 5 ableiten können: 60 Stück Produkt 1 verbrauchen beispielsweise 120 Einheiten des ersten Rohstoffes, und die 60 Stück des zweiten Produktes verbrauchen 60 Einheiten des ersten Rohstoffes, so daß von den insgesamt vorhandenen 200 Einheiten noch 20 übrig bleiben. Die beiden Produkte verbrauchen aber insgesamt je 60 = zusammen 120 Einheiten des zweiten Rohstoffes, so daß nichts übrig bleibt. Ebenso ist es mit dem dritten Rohstoff, der ebenfalls vollständig aufgebraucht wird. Das Verfahren rechnet also richtig.

Wir müßten, da wir mit jeder der 60 Stück des ersten Produktes einen Deckungsbeitrag i.H.v. 2 verdienen, mit dem ersten Produkt 120 Einheiten erzielen; der DB des zweiten Produktes müßte aber 60 mal 3 = 180 sein. Zusammen zeigt das Rechenverfahren in der Tat einen Deckungsbeitrag i.H.v. 300 Einheiten:

DB: .... 300 €

Während des gesamten Rechenverfahrens hat sich der Einheitsvektor der DB-Spalte *nicht verändert*. Er kann also auch *weggelassen* werden. Der DB-Wert ist dennoch stets in der Zelle rechts unten zu finden. Dies ist eine *Ausnahme* zu den grundlegenden Notations- und Darstellungsregeln, die wir oben eingeführt haben.

3.5. Mehrdeutigkeit und Degeneration

Nicht jedes Simplex-Tableau hat eine einzige, eindeutige Lösung. Simplex-Tableaus sind lineare Gleichungssysteme, und diese sind nur eindeutig lösbar, wenn die Zahl der Variablen gleich der Zahl der Gleichungen ist. Das ist im Simplex-Tableau aber nicht garantiert. Die Fälle der Mehrdeutigkeit oder Degeneration sind also die, bei denen eine eindeutige Lösung nicht aufgefunden werden kann, oder mehrere zugleich optimale Lösungen bestehen.

Stehen beispielsweise in der Zielzeile zwei gleichermaßen kleinste, negative Werte, so liegt eine *Mehrdeutigkeit* vor; findet man nach der Division der Restriktionsspalte durch die positiven Werte einer Spalte mehrere gleichermaßen kleinste Werte, so spricht man von einer *Degeneration*. Degeneration und Mehrdeutigkeit können zu *verschiedenen optimalen aber vom Betrag nicht gleichen Lösungen* führen.

Betrachten wir hierzu zwei Beispiele. Ändern wir die Ausgangsbedingungen des vorliegenden Problemes dahingehend, daß beide Produkte einen Deckungsbeitrag von je 2 € erzielen. Das Simplex-Basistableau müßte dann folgendermaßen aussehen:

X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	DB	Restriktion
2	1	1	0	0	0	200
1	1	0	1	0	0	120
1	3	0	0	1	0	240
–2	–2	0	0	0	1	0

Es ist offensichtlich, daß jetzt mit der ersten *oder* der zweiten Spalte begonnen werden könnte. Es gibt also zwei mögliche Lösungswege. Diese können zu vollkommen verschiedenen DB-Werten führen, und es gibt keine Garantie, daß diese gleich sind. *Optimale Lösungen können also verschiedene Werte annehmen!* Das liegt daran, daß das Simplex-Rechenverfahren eine Lösung als optimal erkennt, wenn jede unmittelbare Änderung zu einer Verschlechterung führt; vollkommen verschiedene andere Lösungen werden jedoch nicht überprüft. Es liefert also nur *Pareto-Optima*! Mehrdeutigkeiten müssen also stets *bis zum Schluß für alle Rechenwege* durchgerechnet werden, was sehr aufwendig sein kann.

Eine Degeneration findet man, wenn man bei der ursprünglichen Situation bleibt, die zweite Kapazität aber auf 128 festsetzt:

X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	DB	Restriktion
2	1	1	0	0	0	200
1	1	0	1	0	0	128
1	3	0	0	1	0	240
–2	–3	0	0	0	1	0

Der erste Einheitsvektor müßte nunmehr wieder in der zweiten Spalte erzeugt werden, was folgendermaßen aussähe:

X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	DB	Restriktion
${}^5/_3$	0	1	0	$-{}^1/_3$	0	120
${}^2/_3$	0	0	1	$-{}^1/_3$	0	48
${}^1/_3$	1	0	0	${}^1/_3$	0	80
–1	0	0	0	1	1	240

Der zweite Einheitsvektor ist nunmehr wieder in der ersten Spalte zu produzieren. Teilt man hierbei 120 durch 5/3, so erhält man 72. Dividiert man 48 durch die 2/3 der ersten Spalte, so erhält man aber ebenfalls 72, d.h., es stehen wiederum zwei verschiedene Fortsetzungen des Rechenweges zur Verfügung.

Ökonomietheoretisch ausgedrückt liefert das Simplex-Verfahren nur *Pareto-Optima*. Ein Pareto-Optimum (benannt nach dem ital. Soziologen und Wirtschaftswissenschaftler *Vilfredo Pareto*, 1848-1923) ist ein Optimum, das nur relativ zu den unmittelbar benachbarten Zuständen optimal ist, jedoch nicht unmittelbar ein absolutes Optimum im Vergleich zu allen überhaupt vorkommenden Möglichkeiten darstellt.

Das Simplex-Verfahren ermittelt ein Optimum, das im Vergleich zu allen unmittelbar benachbarten möglichen Zuständen des Lösungspolyeders optimal ist. Im vieldimensionalen Raum können jedoch mehrere, vollkommen verschiedene Ecken gleichermaßen optimal sein. Es müssen bei Mehrdeutigkeit und Degeneration also immer alle Rechenwege verfolgt werden, um diese Optima zu finden.

Mehrdeutige pareto-optimale Lösungen kommen nur bei mehr als drei Produkten vor. Bei bis zu drei Produkten (also auch im vorliegenden Fall) führen alle parallelen Lösungswege bei gleichen Ausgangszahlen stets zur gleichen Lösung mit dem gleichen Optimum.

3.6. Das Problem mit der Ganzzahligkeit

Simplex-Probleme dienen oft zur Lösung von Aufgaben der Produktionsprogrammoptimierung, denen eine grundlegende Ganzzahligkeitsbedingung anhaftet: man kann *nur ganze Produkte* herstellen, und *keine Teileinheiten*. Die vom Simplex-Verfahren gefundene Optimallösung ist jedoch ein Bruch. Wie findet man das ganzzahlige Optimum?

Für diesen Fall hat es sich bewährt, alle dem theoretischen Optimum benachbarten möglichen ganzzahligen Mengenverhältnisse *zuerst auf Möglichkeit zu überprüfen*, und sodann die möglichen Mengenkombinationen einer *vergleichenden Ergebnisbetrachtung* zu unterziehen.

Betrachten wir ein Beispiel. Für drei Produkte gelten die folgenden Beschränkungen:

	Produkte			Kapazität
	A	B	C	
Rohstoff	6 kg	3 kg	4 kg	900 kg
Energie	3 KWh	5 KWh	5 KWh	750 KWh
DB/Stück	45 €	55 €	30 €	

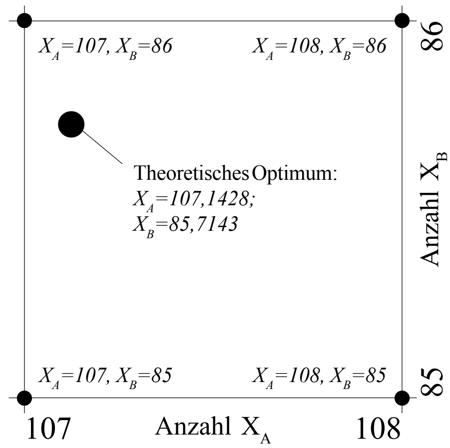
Berechnet man mit der Simplex-Methode das optimale Sortiment, so ergibt sich nach zwei Iterationen folgendes theoretische Optimum:

X_A = 107,1428 Stück
X_B = 85,7428 Stück
X_C = 0,000 Stück

DB = 9.5535,7143 €

Es ist offensichtlich, daß ein realistischer Wert aber nur ganzzahlig sein kann wenn man unterstellt, daß Produkteinheiten wie „Stück“ oder „Exemplare“ gefertigt werden, die jeweils nur als Ganzes nutzbare Einheiten darstellen.

Man muß also alle dem theoretischen Optimum benachbarte *Ecken eines Lösungsraumes* abprüfen und unter den gefundenen möglichen Lösungen die beste aussuchen. Im vorliegenden Falle gehören nur zwei Produkte der Lösung an, so daß der Lösungsraum sich zu einer Lösungsfläche reduziert:



Für die vier dem theoretischen Optimum benachbarten Ecken der Lösungsfläche erhalten wir folgende Verbräuche an Energie und Rohstoff:

X_A	X_B	Σ Rohstoff	Σ Energie	
107	85	897	746	OK
107	86	900	751	
108	85	903	749	
108	86	906	754	

Von allen durch die Ecken der Lösungsfläche beschriebenen möglichen, d.h., ganzzahligen Lösungen ist nur eine einzige mit den gegebenen Ressourcen zu machen, d.h., realistisch.

Der durch diese Lösung vermittelte Deckungsbeitrag von 9.490 € ist damit das tatsächlich im Rahmen der vorgegebenen Beschränkungen erzielbare Optimum. Es bleibt ein Rest von 3 kg Rohstoff und die Energiekapazität wird bis auf einen Rest von 4 KWh ausgeschöpft.

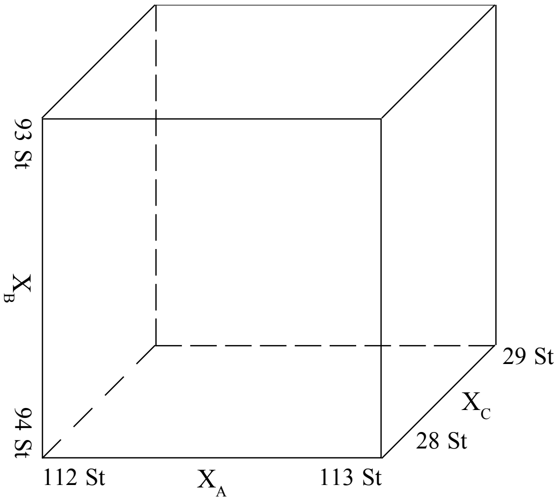
Bei komplexeren Problemen ergibt sich oft ein *mehrdimensionaler Lösungsraum* mit einer entsprechend großen Zahl von abzutestenden Lösungsalternativen. Das kann den erforderlichen Rechenaufwand dramatisch erhöhen. Bei der Ausgangstabelle:

Produkte:	X_A	X_B	X_C	X_D	X_E	X_F	Restr.
Verbrauch 1:	2	4	3	5	6	5	800
Verbrauch 2:	6	1,5	3	4	3	9	900
Verbrauch 3:	1	4	4	6	4	2	600
Verbrauch 4:	4	2	4	5	6	5	750
DB/Stück:	9	5,5	8,5	6	5	3	

Ergibt sich beispielsweise in 3 Iterationen als Optimum die folgende nicht-ganzzahlige Lösung:

X_A	=	112,500 Stück
X_B	=	93,750 Stück
X_C	=	28,125 Stück
X_D	=	0,000 Stück
X_E	=	0,000 Stück
X_F	=	0,000 Stück
DB	=	1.767,1875 €

Der zuvor mit zwei Produkten durchgeführte Prozeß kann nunmehr mit den drei Produkten der Lösung durchgeführt werden, so daß sich ein dreidimensionaler Lösungsraum ergibt:



Wie bereits zuvor in der Ebene müßten auch hier alle Ecken des Lösungsbereiches zunächst auf Möglichkeit hin untersucht und anschließend hinsichtlich der durch sie vermittelten Deckungsbeiträge hin verglichen werden. Die optimale Ecke wäre das zu wählende Gesamtoptimum des vorliegenden Problemes. Die folgende Tabelle stellt zunächst die möglichen Produktionsprogramme und deren Verbräuche zusammen. Zur besseren Übersichtlichkeit sind dabei alle Überschreitungen der vorhandenen Ressourcen durch **Fettdruck** markiert:

X_A	X_B	X_C	V_1	V_2	V_3	V_4	Mögl.
112	93	28	680	895,5	596	746	ja
112	93	29	683	898,5	600	750	ja
112	94	28	684	897	600	748	ja
112	94	29	687	900	**604**	**752**	**nein**
113	93	28	682	**901,5**	597	750	**nein**
113	93	29	685	**904,5**	**601**	**754**	**nein**
113	94	28	686	**903**	**601**	**752**	**nein**
113	94	29	689	**906**	**605**	**756**	**nein**

Für die möglichen Sortimente untersuchen wir nun zur Auffindung des absoluten Optimums die jeweiligen Dekkungsbeiträge:

X_A	X_B	X_C	DB
112	93	28	1757,50 €
112	93	29	1766,00 €
112	94	28	1763,00 €

Man kann damit eindeutig die zweite Option mit X_A = 112 Stück, X_B = 93 Stück und X_C = 29 Stück als Optimum erkennen. Die Produkte D, E und F sind überhaupt nicht in der Basislösung, d.h., werden gar nicht gefertigt.

Diese Lösungsmethode kann auch vieldimensionale Räume erfassen und wird dann u.U. *sehr aufwendig*. Besteht beispielsweise eine Lösung aus 10 Produkten, so hat der 10-dimensionale Lösungskörper schon 1024 abzuprüfende Ecken; bei 20 Produkten in der Lösungsvariable sind es aber nicht weniger als 1.048.576!

Es müßte damit offensichtlich sein, weshalb diese Lösungsmethode vor Einführung von Computern wenig Anhänger hatte.

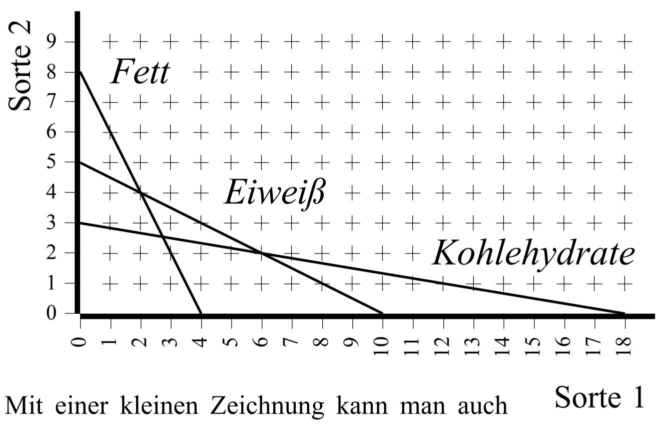
3.7. Maximierung und Minimierung

Bislang haben wir die Simplex-Methode ausschließlich verwendet, um Probleme der Produktionsprogrammrechnung zu lösen, d.h., *Deckungsbeitragsmaximierung* zu betreiben. Es gibt jedoch auch analog zu lösende Probleme, bei denen es nicht auf die maximierung des Deckungsbeitrages oder einer ähnlichen Größe, sondern auf die Minimierung der Kosten ankommt. Der Simplex-Algorithmus kann damit *beide Teile des ökonomischen Rationalprinzipes abbilden* und ist ein *universelles Rechenverfahren*.

Betrachten wir wiederum ein einleitendes Beispiel. Um eine gegebene Anzahl von Hühnern zu füttern stehen einem Landwirt zwei verschiedene Arten von Hühnerfutter zur Verfügung, „Sorte 1" und „Sorte 2". Jede Sorte enthält Eiweiß, Fett und Kohlehydrate in unterschiedlichen Mengen pro Kilo, sowie eine bestimmte Menge ballaststoffe. Um die Tiere gesund zu halten, sind pro Tag bestimmte Mindestmengen an Fett, Eiweiß und Kohlehydrate erforderlich:

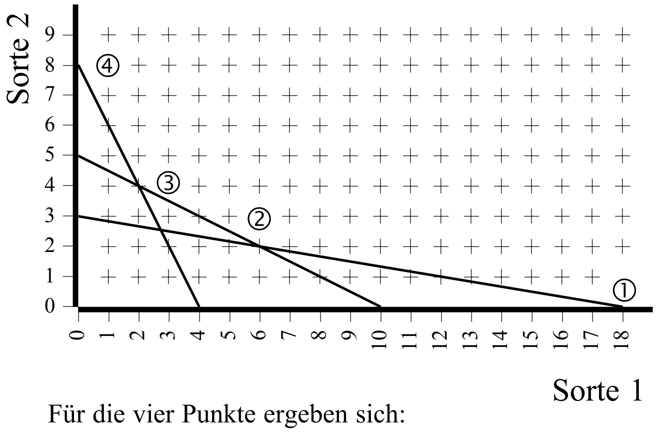
	Sorte 1	Sorte 2	Mindest
Eiweiß:	100 g	200 g	1,0 kg
Fett:	200 g	100 g	0,8 kg
Kohlehydrate:	100 g	600 g	1,8 kg
Preis pro Kilo:	8,0 €	12,0 €	→ Min!

Anders als im vorherigen Fall entstehen hier Kosten, die zu minimieren sind. Da beide Arten von Fußßer gemischt werden können (d.h., *Substitutionalität* besteht), ist diejenige Mischung herauszufinden, bei der die Gesamtkosten pro Tag minimal sind.



Mit einer kleinen Zeichnung kann man auch hier wieder zunächst die möglichen Einsatzmengenverhältnisse auffinden. Für jede Beschränkung gibt es wiederum eine Linie. Anders als im vorherigen Fall sind nunmehr jedoch alle Kombinationen der beiden Sorten erlaubt, die *über* (und nicht wie zuvor unter) allen Linien liegen. Es gibt also keinen abgeschlossenen Lösungspolyeder mehr, sondern eine *nach oben unbegrenzte Lösungsfläche*.

Mit der Prüfung aller Ecken dieses nur teilweise definierten Lösungsfläche kann auch hier wieder die kostengünstigste Kombination herausgefunden werden:



Für die vier Punkte ergeben sich:

Punkt	Sorte 1	Sorte 2	Kosten
①	18 kg	0 kg	144 €
②	6 kg	2 kg	72 €
③	2 kg	4 kg	64 €
④	0 kg	8 kg	96 €

3.8. Die Transformation der Dualkonversion

Hier liegt offensichtlich eine Struktur vor, die der der vorher diskutierten Maximierungsprobleme *sehr ähnelt*. Ebenso wie zuvor kann man auch hier wieder ein Ungleichungssystem aufstellen. Aus einem Grund, der später ersichtlich wird, bezeichnen wir hierbei jedoch die beiden Futtersorten als Y, also die Sorte 1 als Y_1 und die Sorte 2 als Y_2:

Eiweiß: $$0{,}1Y_1 + 0{,}2Y_2 \geq 1{,}0$$

Fett: $$0{,}2Y_1 + 0{,}1Y_2 \geq 0{,}8$$

Kohlehydrate: $$0{,}1Y_1 + 0{,}6Y_2 \geq 1{,}8$$

Kosten: $$K = 8Y_1 + 12Y_2$$

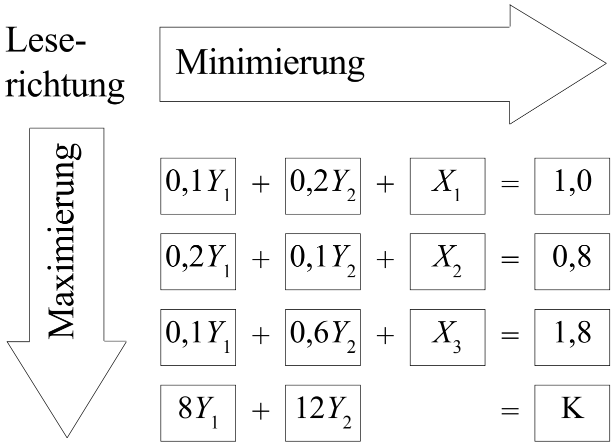
Wie schon zuvor bei den Maximierungsproblemen kann man auch in diesem Fall wieder aus den Ungleichungen Gleichungen machen, indem man Schlupfvariablen hinzufügt, die in diesem Fall jedoch X heißen. Für jede Zeile des Ungleichungssystems wird eine Schlupfvariable benötigt:

Eiweiß: $$0{,}1Y_1 + 0{,}2Y_2 + X_1 = 1{,}0$$

Fett: $$0{,}2Y_1 + 0{,}1Y_2 + X_2 = 0{,}8$$

Kohlehydrate: $$0{,}1Y_1 + 0{,}6Y_2 + X_3 = 1{,}8$$

Die einfachste Art, dieses Problem anzugehen besteht darin, aus der Minimierungsaufgabe durch die sogenannte *Dualkonversion* eine Maximierungsaufgabe zu machen, und sie dann auf die gewohnte Art zu lösen. Dabei machen wir uns den Umstand zunutze, daß zu jedem Maximierungsproblem genau ein einziges Minimierungsproblem gehört und umgekehrt. Mit einer einfachen Rechenoperation kann man nun aus der vorstehenden Minimierungsaufgabe eine Maximierungsaufgabe machen. Hierzu müssen lediglich die Variablen X und Y sowie die Zeilen und die Spalten *vertauscht* werden:



Die Dualkonversion vertauscht Zeilen und Spalten

Aus dem Minimierungs-Gleichungssystem

Eiweiß: $$0{,}1Y_1 + 0{,}2Y_2 + X_1 = 1{,}0$$

Fett: $$0{,}2Y_1 + 0{,}1Y_2 + X_2 = 0{,}8$$

Kohlehydrate: $$0{,}1Y_1 + 0{,}6Y_2 + X_3 = 1{,}8$$

Kosten: $$K = 8Y_1 + 12Y_2$$

wird also das dualkonvertierte Maximierungsproblem:

1. Gleichung: $$0{,}1X_1 + 0{,}2X_2 + 0{,}1X_3 + Y_1 = 8$$

2. Gleichung: $$0{,}2X_1 + 0{,}1X_2 + 0{,}6X_3 + Y_2 = 12$$

Deckungsbeitrag: $$DB = X_1 + 0{,}8X_2 + 1{,}8X_3$$

3.9. Auflösung dualkonvertierter Probleme

Dieses neue Gleichungssystem kann nunmehr aber auf die bekannte Art und Weise in eine Simplex-Basistabelle überführt und gelöst werden. Zunächst ergibt sich die folgende *Simplex-Basislösung*:

X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_2	DB/K	Restriktion
0,1	0,2	0,1	1	0	0	8
0,2	0,1	0,6	0	1	0	12
–1	–0,8	–1,8	0	0	1	0

Die Lösung erfolgt nun in drei Schritten:

X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_2	DB/K	Restriktion
1/15	11/60	0	1	–1/6	0	6
1/3	1/6	1	0	5/3	0	20
–2/5	–1/2	0	0	3	1	36

Der zweite Lösungsschritt:

X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_2	DB/K	Restriktion
4/11	1	0	60/11	–10/11	0	360/11
3/11	0	1	–10/11	20/11	0	160/11
24/110	0	0	30/11	28/11	1	576/11

Der dritte Lösungsschritt ist zugleich die Optimallösung des Problemes:

X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_2	DB/K	Restriktion
0	1	–4/3	20/3	–10/3	0	40/3
1	0	11/3	–10/3	20/3	0	160/3
0	0	4/5	2	4	1	64

Während das Rechenverfahren bei Minimierungsproblemen genau mit der Vorgehensweise bei Maximierungsproblemen identisch ist, ist die *Ableseregel anders*. Bei Maximierungsproblemen wurde das Problem ursprünglich in X-Variablen formuliert. Es werden also die X-Variablen und das Deckungsbeitragsergebnis über die Einheitsvektoren abgelesen:

X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_2	DB/K	Restriktion
0	1	-4/3	20/3	-10/3	0	40/3
1	0	11/3	-10/3	20/3	0	160/3
0	0	4/5	2	4	1	64

Diese Ablesung wäre zwar mathematisch richtig, aber sinnlos, weil in dem ursprünglichen Minimierungsproblem überhaupt keine X-Variablen vorkamen. Bei Minimierungsproblemen werden vielmehr die Y-Spalten vertikal nach unten, die Kosten aber immer noch über den Vektor der Kostenspalte abgelesen. Es ergibt sich also:

X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_2	DB/K	Restriktion
0	1	-4/3	20/3	-10/3	0	40/3
1	0	11/3	-10/3	20/3	0	160/3
0	0	4/5	2	4	1	64

Y_1 = 2 kg
Y_2 = 4 kg

K = 64 €

Dieses Ergebnis entspricht genau dem ursprünglich durch die graphische Lösung entwickelten Resultat.

Allgemein läßt sich dieses Lösungsverfahren immer einsetzen, wenn

- Mehrere Ressourcen wie Rohstoffe, Halbfabrikate oder Kaufteile kombinierbar sind und in verschiedenen Mengenkombinationen ein Produkt ergeben können (*Substitutionalität*) oder
- Eine betriebliche Leistung mehrere miteinander verbundene Teilleistungen erbringt, die zueinander in einem starren Mengenverhältnis stehen (*Limitationalität*), aber in unterschiedlichen Mengen nachgefragt werden.

Ersterer Fall ist insbesondere im produzierenden Gewerbe häufig (wie vorstehend demonstriert), während der zweite Fall für Dienstleistungsgewerbe und die Reise- und Transportbranche typisch ist:

Eine Schiffahrtsgesellschaft bietet eine Überfahrt an, die in der ersten Klasse, der zweiten Klasse und in der Deckklasse gebucht werden kann. Es können drei verschiedene Schiffstypen eingesetzt werden, die jedes die drei genannten Klassen bieten. Für einen bestimmten Tag besteht die folgende Situation:

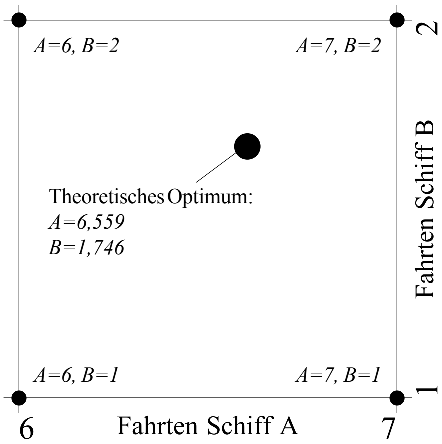
	Verfügbare Schiffe			Nachfrage
	A	B	C	
1. Klasse	80	30	70	450
2. Klasse	50	110	75	520
Deck	130	50	60	940
Kosten	90.000	92.000	112.000	→ Min!

Die Frage, welches Schiff die Fahrt wie oft machen soll, um mit den minimalen Kosten die Strecke nachfragegerecht zu bedienen, kann mit Hilfe des Simplex-Algorithmus in der vorstehend demonstrierten Art beantwortet werden. Hierbei gibt es auch wieder das bereits diskutierte Ganzzahligkeitsproblem. Die theoretisch optimale Lösung lautet nämlich:

Schiff A = 6,559 Fahrten
Schiff B = 1,746 Fahrten

Kosten = 750.949,15 €

Da ein Schiff keine Bruchteile von Fahrten machen kann, ergibt sich folgende Lösungsfläche:



Überprüft man die Ecken des Quadrats, so erhält man folgende Ergebnisse:

A	B	1.	2.	D	Möglich
6	1	510	**410**	**830**	**nein**
6	2	540	520	**880**	**nein**
7	1	590	**460**	960	**nein**
7	2	620	570	1010	ja

Für die beiden möglichen Fälle sind nunmehr die Kosten zu vergleichen. Die Variante mit den niedrigeren Kosten ist das ganzzahlige Optimum:

A	B	Kosten
7	2	814.000 €

Wären mehrere Fahrpläne gleichzeitig möglich, so wären deren Kosten zu *vergleichen*.

4. Weitere Anwendungen

Weitere Anwendungen dieses Verfahrens sind:

- Das *Streckenaufteilungsproblem*, bei dem eine gegebene Gesamtstrecke in Teileinheiten aufzuteilen ist, etwa bei der Herstellung von Bauelementen aus Rohstücken konstanter Größe;
- Das *Flächenaufteilungsproblem*, bei dem eine gegebene Fläche in Teileinheiten aufzuteilen ist, etwa beim Stanzen von Blechteilen aus einem Rohling bestimmter Größe;
- Das *Wegeproblem*, bei dem eine gegebene Gesamtstrecke in möglichst kurzer Zeit so zu befahren ist, daß eine bestimmte Anzahl von Zielorten mit der insgesamt geringsten Kilometerzahl erreicht wird.

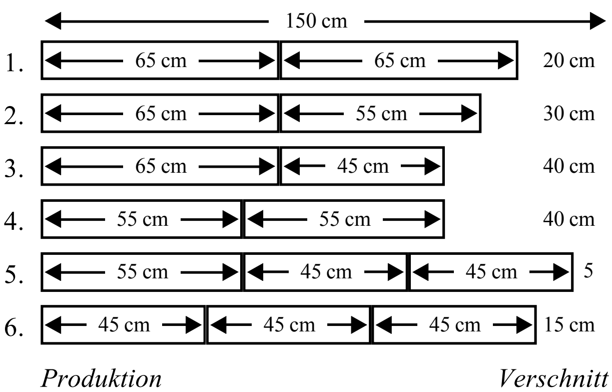
Ist eine Wegeaufteilung eindimensional, so kann das beschriebene Verfahren direkt angewandt werden. Die Simplextabelle wird dabei um so kleiner, je größer die zu ermittelnden Teileinheiten relativ zum Rohstück sind, und um so größer, je kleiner die Teileinheiten relativ zum Rohstück sind, weil die Anzahl der möglichen Kombinationen sich u.U. drastisch erhöht.

Das Wegeproblem kann auch *nichtlinear* werden, was Modifikationen am Rechenweg erfordert.

Wir betrachten nur das *Strecken- und Flächenaufteilungsproblem* als eines der häufigsten Anwendungsfälle für den Simplex-Algorithmus. Das geht bei ein-, zwei- und dreidimensionalen Aufteilungen gleichermaßen. Es erfordert stets eine *Dualkonversion*.

Betrachten wir zunächst ein eindimensionales Beispiel:

In einer Papierfabrik werden *Rollen zu 150 cm Breite* hergestellt. Daraus sollen 20 Rollen zu 65 cm Breite, 30 Rollen zu 55 cm Breite und 50 Rollen zu 45 cm Breite mit minimalem Verschnitt hergestellt werden. Zur Lösung dieses Problemes wird zunächst ermittelt, welche Schnittpläne *überhaupt möglich* sind. Hierzu kann man sich eine kleine *Skizze* fertigen:



Obwohl diese Skizze im Prinzip ausreicht ist es einfacher, wenn man sie in eine *Tabelle* umwandelt. In diesem Arbeitsschritt wird was die Skizze zeigt lediglich in eine andere Form gebracht. Aus der Tabelle ist das *Gleichungssystem direkt abzuleiten*:

Nr.	Größe	Anzahl	Schnittplan Nr.					
			1	2	3	4	5	6
1	65 cm	20 St	2	1	1	0	0	0
2	55 cm	30 St	0	1	0	2	1	0
3	45 cm	50 St	0	0	1	0	2	3
4	Verschnitt in cm		20	30	40	50	5	15

Aus dieser Tabelle resultiert also das folgende *Ungleichungssystem*:

Zielfunktion:

$$K = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5 + Y_6$$

Lineare Beschränkungen:

$$\begin{aligned} 2Y_1 + Y_2 + Y_3 &\geq 20 \\ Y_2 + 2Y_4 + Y_5 &\geq 30 \\ Y_3 + 2Y_5 + 3Y_6 &\geq 50 \\ Y_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Hieraus ist durch Dualkonversion die folgende *Simplex-Basislösung* abzuleiten:

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	R
Z_1	2	0	0	1	0	0	0	0	0	1
Z_2	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1
Z_3	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1
Z_4	0	2	0	0	0	0	1	0	0	1
Z_5	0	1	2	0	0	0	0	1	0	1
Z_6	0	0	3	0	0	0	0	0	1	1
Z	-20	-30	-50	0	0	0	0	0	0	0

Diese führt zu der folgenden *optimalen Lösung*:

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	R
Z_1	1	0	0	0,5	0	0	0	0	0	0,5
Z_2	0	0	0	-0,8	1,5	0	0	-1,5	1	0,25
Z_3	0	0	0	-0,8	0,5	1	0	-0,5	0	0,25
Z_4	0	0	0	1	-2	0	1	0	0	-0
Z_5	0	1	0	-0,5	1	0	0	0	0	0,5
Z_6	0	0	1	0,25	-0,5	0	0	0,5	0	0,25
Z	0	0	0	7,5	5	0	0	25	0	37,5

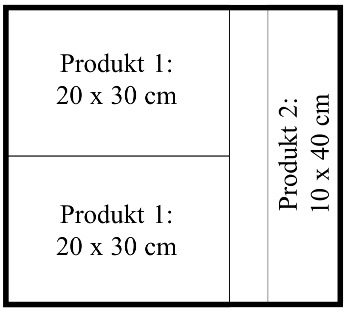
Es werden also insgesamt 37,5 Rollen benötigt. Aus diesen sind 7,5 mal der erste, 5 mal der zweite und 25 mal der 5. Schnittplan zu erstellen.

Da auch hier wieder eine *Ganzzahligkeitsbedingung* vorliegt, wäre wiederum eine *dreidimensionale Eckenbetrachtung* erforderlich, um die tatsächlich kostenminimale Anzahl von einzukaufenden Rohstücken zu errechnen.

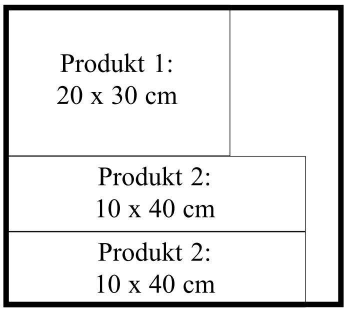
Die gleiche Herangehensweise ist auch bei zwei- und dreidimensionalen Aufteilungsproblemen erfolgreich. Betrachten wir wiederum ein Beispiel. Diesmal erhält ein Unternehmen von einem Zulieferer *Blechrohlinge* von 40 x 45 cm. Aus diesen Rohlingen sollen mit einem Stanzautomaten 130 Teile zu 20 x 30 cm, 200 Teile zu 10 x 40 cm und 90 Teile zu 20 x 20 cm hergestellt werden. Vereinfachend nehmen wir dabei an, daß der Stanzvorgang ohne abzugratende Kante vor sich geht, also Teile direkt nebeneinander aus dem Rohling herausgestanzt werden können.

Auch hier ist es wieder sinnvoll, sich zunächst *alle Möglichkeiten* zu vergegenwärtigen. Wie schon im vorstehenden Fall spielt es dabei keine Rolle, in welcher Reihenfolge die Produkte aus dem Rohling hergestellt werden können. Mögliche Produktionskonfigurationen, bei denen die gleichen Produkte nur in unterschiedlicher Reihenfolge oder räumlicher Anordnung entstehen, werden also *nicht als selbständige Alternativen* behandelt.

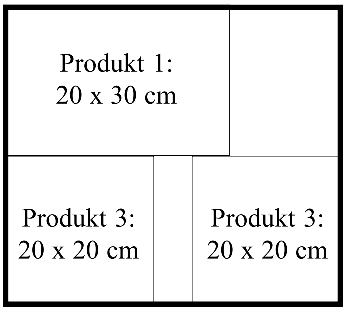
Folgende mögliche Produktionskonfigurationen lassen sich identifizieren:



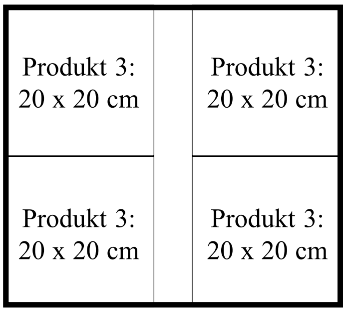
Konfiguration Nr. 1



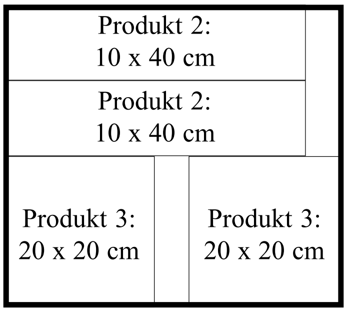
Konfiguration Nr. 2



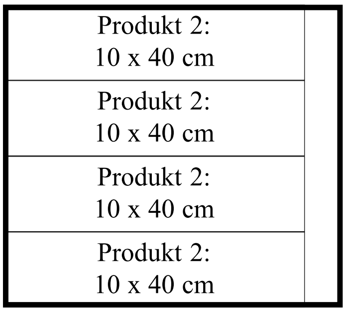
Konfiguration Nr. 3



Konfiguration Nr. 4



Konfiguration Nr. 5



Konfiguration Nr. 6

Die Vorgehensweise bei diesem Problemtyp deckt sich exakt mit der bei der eindimensionalen Variante. Es sollte auch hier wieder zunächst eine Tabelle mit den Möglichkeiten erstellt werden, aus der sich das Gleichungssystem ableiten läßt.

Nr.	Größe	Anzahl	Konfiguration Nr.					
			1	2	3	4	5	6
1	20x30 cm	130 St	2	1	1	0	0	0
2	10x40 cm	200 St	1	2	0	0	2	4
3	20x20 cm	90 St	0	0	2	4	2	0

Man beachte, daß in dieser Tabelle der Verschnitt nicht mehr aufgeführt ist, weil seine Kenntnis zur Lösung des Problems unerheblich ist. Obwohl uns die Öko-Ideologie täglich was anderes einbläuen will kommt es nicht auf die Minimierung des Ausschusses, sondern der Zahl der einzukaufenden Rohlinge an!

Aus dieser Tabelle läßt sich nunmehr das folgende Ungleichungssystem ableiten:

<u>Lineare Beschränkungen</u>:

$$
\begin{aligned}
2Y_1 + Y_2 + Y_3 &\geq 130 \\
Y_1 + 2Y_2 + 2Y_5 + 4Y_6 &\geq 200 \\
2Y_3 + 4Y_4 + 2Y_5 &\geq 90 \\
Y_i &\geq 0
\end{aligned}
$$

<u>Zielfunktion</u>:

$$K = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5 + Y_6$$

Hieraus ist durch Dualkonversion die folgende *Simplex-Basislösung* abzuleiten:

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	R
Z_1	2	1	0	1	0	0	0	0	0	1
Z_2	1	2	0	0	1	0	0	0	0	1
Z_3	1	0	2	0	0	1	0	0	0	1
Z_4	0	0	4	0	0	0	1	0	0	1
Z_5	0	2	2	0	0	0	0	1	0	1
Z_6	0	4	0	0	0	0	0	0	1	1
Z	-130	-200	-90	0	0	0	0	0	0	0

Diese führt zu der folgenden *optimalen Lösung*:

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	R
Z_1	1	0	0	0,5	0	0	0	0	-0,13	0,375
Z_2	0	0	0	-0,5	1	0	0	0	-0,38	0,125
Z_3	0	0	0	-0,5	0	1	-0,5	0	0,125	0,125
Z_4	0	0	1	0	0	0	0,25	0	0	0,25
Z_5	0	0	0	0	0	0	-0,5	1	-0,5	0
Z_6	0	1	0	0	0	0	0	0	0,25	0,25
Z	0	0	0	65	0	0	22,5	0	33,75	121,25

Es werden also 121,25 Rohlinge benötigt, um 65 mal die Konfiguration 1, 22,5 mal die Konfiguration 4 und 33,75 mal die Konfiguration 6 zu produzieren. Auch in diesem Beispiel ist also aufgrund der Ganzzahligkeitserfordernis wiederum eine *dreidimensionale Eckenbetrachtung* erforderlich.

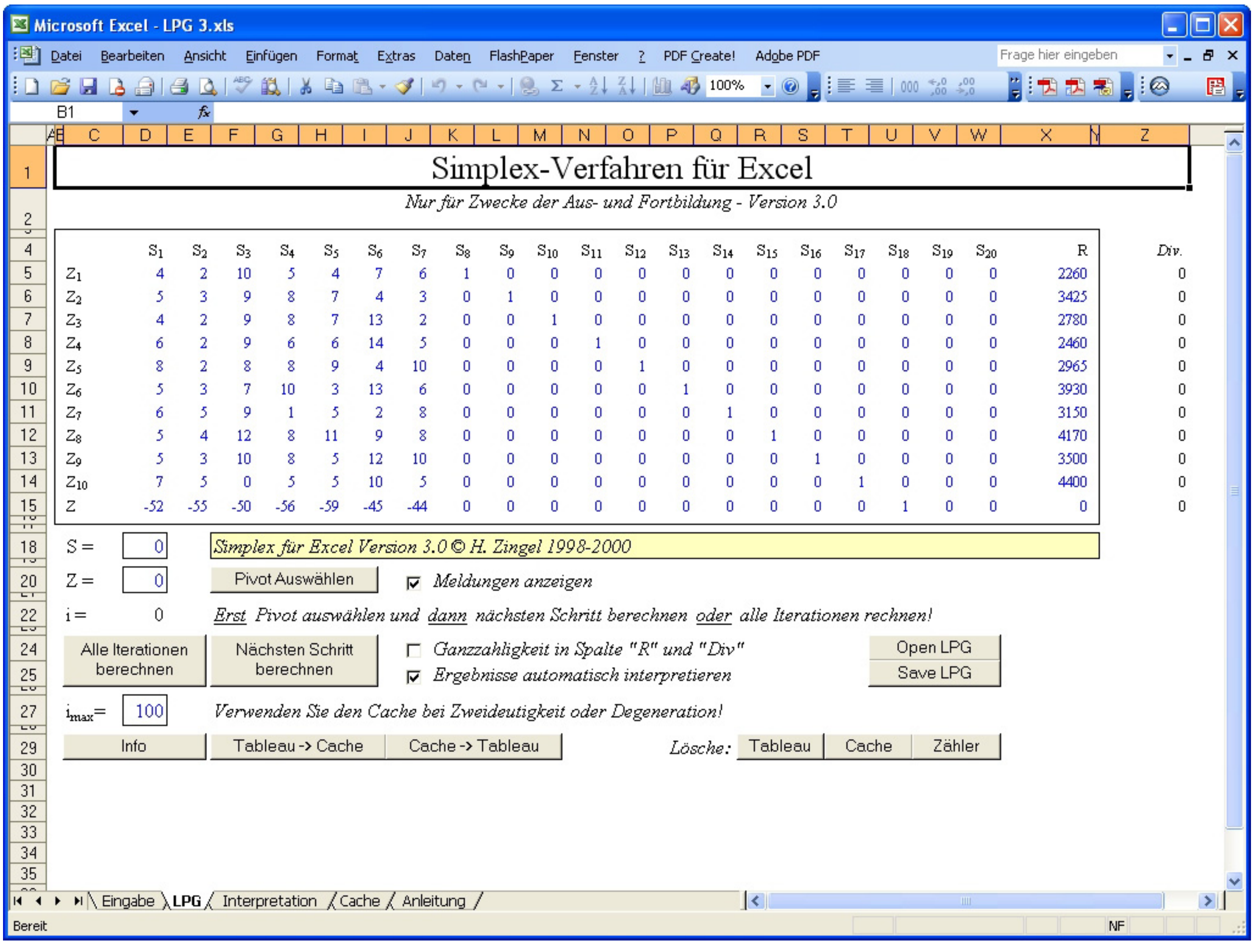
Dieses Verfahren ist *außerordentlich vielseitig*. Praktische Anwendungsbeispiele für diese Optimierungsmethode sind etwa:

- Berechnung optimaler Schnittpläne, wie vorstehende demonstriert,
- Allgemeine Materialmengenoptimierung in Produktionsprozessen,
- Dienstplanrechnung,
- Optimierung von Verpackungen,
- Fahrplan- und Wegeoptimierung.

Bei der Fahrplanrechnung ist vielfach jedoch auch die *Vogel'sche Approximationsmethode* anwendbar. Allgemein ist die Simplexrechnung immer anwendbar, wenn pro Produkt oder Ressource nur ein Deckungsbeitrags- bzw. ein Kostenwert vorliegt. Liegen pro Lieferant unterschiedliche Deckungsbeitrags- oder Kostenwerte vor, so ist oft nur noch mit der Vogel'schen Approximationsmethode zu rechnen. Deren Hauptanwendungsgebiet ist in der logistischen Wegekostenminimierung zu finden. Diese betrachten wir daher an anderer Stelle.

5. Eine elektronische Lösung

Um zu einem grundsätzlichen Verständnis des Verfahrens zu gelangen, sollten Sie diese Methode hier in diesem Skript gründlich nachvollziehen, und einiger der Ihnen zur Verfügung stehenden Aufgaben bearbeiten. Erst wenn Sie glauben, die Grundzüge des Verfahrens zu beherrschen, können Sie für weitere Simplex-Tableaus das Ihnen auf der CD zur Verfügung stehende Programm verwenden. Sie benötigen hierfür Excel 97 oder besser. Eine Version für Excel 5 oder Excel 5 kann Ihnen Ihr Dozent anfertigen, wenn Ihr Dozent vom Autor lizensiert ist. Wenn Sie Teilnehmer eines Lehrganges des Autor sind, wird Ihnen das Passwort zur Aufdeckung des Quellcodes zur Verfügung gestellt.



Nach gründlicher Bearbeitung aller Unterlagen sollten Sie in der Lage sein, ein vergleichbares System in einem Produktionsbetrieb zu programmieren und zu implementieren. Voraussetzung hierfür sind solide Grundkenntnisse der Kostenrechung und der Statistik (speziell Regressionsrechnung). Ferner sollten Sie VisualBASIC beherrschen. Der Autor dieses Skriptes hat vergleichbare Systeme in Industriebetrieben eingeführt und steht Ihnen mit seiner Erfahrung jederzeit zur Seite.

6. Anhang: Substitutionale Produktionsfunktionen

Eine *Produktionsfunktion* beschreibt Einsatz- und Ausbringungsverhältnisse von Produktionsfaktoren (Boden, Kapital, Arbeit, Information).
Substitutionalität bedeutet Austauschbarkeit (ein Faktor kann gegen einen anderen ausgetauscht werden).

Arten aufgrund Rationalprinzip:

Minimalprinzip
Ziel ist Faktoreinsatzminimierung

Anwendungsbeispiele

1. <u>Substitutionale Einsatzfaktorkombination</u>: Wahl substitutionaler Einsatzmengen, wie z.B. *Rohstoffe*, die jeweils mehrere Nutzwerte erbringen (z.B. das Hühnerfutter-Problem)
2. <u>Transportmittel-Planung</u>: Wahl der optimalen *Verkehrsmittel- oder Maschinen-Einsatzplanung*, wenn jede Anlage unterschiedliche Transportarten, Klassen o.ä. zugleich anbietet (=Sonderfall der substitutionalen Faktoreinsatzplanung)
3. <u>Schnittplan-Problem</u>: Wahl optimaler Aufteilungen *einheitlicher Einsatzfaktoren*, die mehrere Nutzwerte erbringen (*Schnittpläne* für Bleche usw. aber z.B. auch das *Dienstplan-Problem*)

<u>Funktionsmuster</u>:

$$\begin{aligned} q_{11}Y_1 + q_{12}Y_2 + \ldots + q_{1n}Y_n + X_1 &= \text{Restriktion}_1 \\ q_{21}Y_1 + q_{22}Y_2 + \ldots + q_{2n}Y_n + X_2 &= \text{Restriktion}_2 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots &= \ldots\ \ldots \\ q_{m1}Y_1 + q_{m2}Y_2 + \ldots + q_{mn}Y_n + X_m &= \text{Restriktion}_m \end{aligned}$$

<u>Zielfunktion</u>: $\text{Min } K = K_1X_1 + K_2X_2 + \ldots + K_nX_n!$

Kein eigenes Lösungsverfahren, daher Dualkonversion erforderlich

Maximalprinzip
Ziel ist Faktoroutputmaximierung

Anwendungsbeispiel

<u>Bestimmung des optimalen Sortiments</u>: Bestimmung der Outputmengenkombination, bei der der optimale (d.h. maximale) Gesamtdeckungsbeitrag vermittelt wird. Sonderfälle möglich durch *Mindestmengenfestlegungen* (Ökosubventionsproblem) oder durch *Ganzzahligkeiten* (besonders dann, wenn die relativen Mengen klein sind, also die Abweichungen, die durch die Ganzzahligkeit bedingt werden, relativ groß sind).

<u>Funktionsmuster</u>:

$$\begin{aligned} q_{11}X_1 + q_{12}X_2 + \ldots + q_{1n}X_n + Y_1 &= \text{Restriktion}_1 \\ q_{21}X_1 + q_{22}X_2 + \ldots + q_{2n}X_n + Y_2 &= \text{Restriktion}_2 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots &= \ldots\ \ldots \\ q_{m1}X_1 + q_{m2}X_2 + \ldots + q_{mn}X_n + Y_m &= \text{Restriktion}_m \end{aligned}$$

<u>Zielfunktion</u>: $\text{Max DB} = DB_1X_1 + DB_2X_2 + \ldots + DB_nX_n!$

Dualkonversion
wandelt Minimierungs- in Maximierungsproblem

1. Die Variablen X und Y werden vertauscht und
2. Spalten und Zeilen werden vertauscht

Lösung per Simplex
(oder Gauß oder andere Methode)

Einheitliche Lösung immer für beide Funktionstypen

Ablesung über <u>Nicht-Einheitsvektoren</u> in <u>Zielzeile</u>

Ablesung über <u>Einheitsvektoren</u> in <u>Restriktions-Spalte</u>