

# Kostenstellenumlage im Betriebsabrechnungsbogen

## *Kleine Übersicht über die wichtigsten Methoden und Rechentechniken*

Version 2.1 © Harry Zingel 1996-2001, EMail: HZingel@aol.com, Internet: http://www.zingel.de  
Nur für Zwecke der Aus- und Fortbildung

### Inhaltsübersicht

1.	Das Problem .....	1	3.2.	Konkrete Abrechnungsverfahren .....	3
2.	Arten von Kostenstellen .....	1	3.2.1.	Das Stufenleiterverfahren .....	3
2.1.	Hauptkostenstellen .....	1	3.2.2.	Die simultane Leistungsverrechnung .....	4
2.2.	Hilfskostenstellen .....	2	3.2.2.1.	Die Lösungsmethode mit dem Gleichungsverfahren .....	5
2.3.	Allgemeine Kostenstellen .....	2	3.2.2.2.	Die Lösungsmethode mit der Matrizeninversion .....	5
3.	Verfahren der Kostenumlagerechnung .....	2	3.2.2.3.	Probleme des Matrizenverfahrens .....	7
3.1.	Allgemeine Umlagehierarchie .....	2	3.3.	Vergleich zwischen Simultan- und Stufenleiterverfahren .....	7

## 1. Das Problem

Der Betriebsabrechnungsbogen (BAB) ist *das wichtigste Werkzeug, innerbetriebliche Leistungsverrechnungen zu ermitteln*. Hauptzweck des BAB ist, *Zuschlagssätze* für die Kalkulation zu ermitteln. Zu diesem Zweck werden Gemeinkosten den Einzelkosten oder einer sonstigen verursachenden Kostengröße *zugeschlagen*. Ein Zuschlag auf Einzelkosten geschieht nach der Formel

$$\text{Zuschlagssatz} = \frac{\text{Gemeinkosten}}{\text{Einzelkosten}}$$

Im *Verwaltungs- und Vertriebsbereich* geschieht derselbe Zuschlag folgendermaßen:

$$\text{Zuschlagssatz} = \frac{GK}{HKU \text{ oder } HKP}$$

Bei *Maschinenkostenstellen* ergeben sich mit der oben beschriebenen Methode absurd hohe Zuschlagssätze. Ferner ist man für Zwecke der Teilkostenrechnung interessiert, Aufschlüsse über Deckungsbeiträge und Break Even Punkte zu erhalten. Man untergliedert deshalb die Maschinenkosten in Fixkosten und variable Kosten, und schlägt sie der verursachenden Größe, d.h., i.d.R. der Maschinenzeit oder sonstigen *Maschinenleistung* (Stückzahl, Stunden) zu:

$$\text{Zuschlagssatz} = \frac{K_{\text{fix}} + K_{\text{var}}}{\text{Leistung}}$$

Zur Ermittlung eines Zuschlagssatzes muß die Kostenstelle eine Leistung nach außen abgeben, die Einzelkosten oder eine Leistungskennzahl verursacht.

Manche Kostenstellen geben jedoch *nur innerbetriebliche Leistungen* ab. Diese Kostenstellen lassen sich also grundsätzlich nicht zuschlagen.

Dennoch müssen sie abgerechnet werden, weil sonst die im BAB ermittelten Zuschläge zu geringe Summen ausweisen und daher die durch den BAB vermittelte Information *unvollständig* wäre, und die in der Kalkulation berechneten langfristigen Mindestpreise *keine Vollkostendeckung* vermitteln würden.

Man muß also die Leistung der Kostenstellen, die keine Leistung an betriebsexterne Leistungsempfänger, d.h., Kunden vermitteln, auf die anderen Kostenstellen *umlegen*. Das hierbei angewandte Rechenverfahren ist ein *innerbetriebliches Leistungsverrechnungssystem*. Um solche Leistungsverrechnungssysteme geht es in diesem Manuskript.

## 2. Arten von Kostenstellen

Man kann die Kostenstellen nach bestimmten relevanten Eigenschaften *kategorisieren*. Aus dieser Kategorisierung lassen sich Grunderkenntnisse für die gegenseitige Verrechnung ableiten.

### 2.1. Hauptkostenstellen

Hauptkostenstellen sind solche Kostenstellen, die eine Leistung *nach außen* an den Markt *abgeben*, also beispielsweise:

- Lager in Industriebetrieben
- Fertigungskostenstellen
- Verwaltung (*bisweilen umstritten!*), Vertrieb

Wesentliches Merkmal ist, daß die Leistung jeder dieser Kostenstelle alleine marktfähig *wäre*, selbst dann, wenn sie tatsächlich nie separat angeboten wird. Etwa wäre das Material auch alleine verkaufsfähig oder die Fertigungskostenstellen *könnten* auch mit fremdem Material oder sonst aus dem betrieblichen Kontext herausgelöst arbeiten - selbst wenn es nie wirklich dazu kommt.

Deshalb haben diese Kostenstellen jeweils eine *eigene Zuschlagsgrundlage*, die die *kostenverursachende Größe* sein muß, was eine *Artikulation des Verursacherprinzipes* ist:

Kostenstelle	Zuschlagsgrundlage
Lager in Industriebetrieben .....	Rohstoffeinzelnkosten
Nichtmaschinelle Fertigung .....	Fertigungslöhne
Maschinelle Fertigung .....	Maschinenleistung
Verwaltung .....	HKU oder HKP
Vertrieb .....	HKU oder HKP

Die Hauptkostenstellen sind daher auch das *Endergebnis der Verteilungsrechnung* im Betriebsabrechnungsbogen. Hauptkostenstellen enthalten die *Kernleistungsbereiche des Betriebes*. Sie sollten bei der Aufteilung des Betriebes

in Kostenstellen im Rahmen der Einrichtung von Kostenrechnungsverfahren *zuerst festgelegt* werden.

## 2.2. Hilfskostenstellen

Keine Hauptkostenstellen wären beispielsweise die Kostenstellen

- Arbeitsvorbereitung
- Konstruktionsbüro
- Modelltschlerei

Diese Kostenstellen verrechnen eine Leistung im wesentlichen nur an *eine einzige Hauptkostenstelle*. Etwa verrechnet die Arbeitsvorbereitung nur an eine oder wenige Produktionskostenstellen. Solche Kostenstellen heißen daher *Hilfskostenstellen*, weil sie eine Hauptkostenstelle unterstützen.

Hilfskostenstellen werden im wesentlichen eingerichtet, um die Binnenstruktur von Arbeitsbereichen *aussagekräftiger* und *überschaubarer* zu gestalten und die Kostenstruktur besser abbilden zu können. Sie *erhöhen* daher die *Aussagekraft des internen Rechnungswesens*.

Wichtig ist, stets eine *Abrechnung auf eine Hauptkostenstelle* aufrechtzuerhalten. Etwa gehören die Hauptbuchhaltung, die Lohnbuchhaltung, der Vorstand, der Aufsichtsrat und das Lohnbüro alle zur Kostenstelle Verwaltung. Sie müssen also ihre Kosten, auch wenn sie zunächst separat ausgewiesen werden, auf die Verwaltung abrechnen. Man spricht von einer *betriebsinternen Leistungsverrechnung*.

Hilfskostenstellen haben *keine Einzelkosten*. Sie haben daher auch *keinen Zuschlagssatz*. Das deckt sich mit der Tatsache, daß sie eine Leistung nur innerbetrieblich und nicht an den Markt, d.h., nicht nach außen abgeben.

## 2.3. Allgemeine Kostenstellen

Ebenfalls keine Hauptkostenstellen wären beispielsweise die Kostenstellen

- Werksarzt und betrieblicher Gesundheitsdienst
- Werkskantine
- Wachdienst und Objektsicherheit
- Qualitätsmanagement und Total Quality Management
- Betriebswäscherei und Reinigungsdienst
- Arbeitssicherheit
- Werksfeuerwehr und Katastrophenschutz

Diese Kostenstellen verrechnen ihre gesamte Leistung an den *gesamten Betrieb* oder wenigstens eine *große Zahl*

*anderer Kostenstellen*. Sie sind daher auch *keine Hilfskostenstellen*, sondern gesamtbetrieblich abzurechnen. Sie heißen daher *allgemeine Kostenstellen*.

Allgemeine Kostenstellen erzeugen aus Sicht der Gütertheorie *innerbetriebliche Kollektivgüter*. Erfahrungsgemäß sind bei großen Betrieben vielfach die *große Mehrzahl* der Kostenstellen allgemeine- oder Hilfskostenstellen, weil die Bedeutung von Kollektivgütern mit wachsender Differenzierung der innerbetrieblichen Arbeitsabläufe zunimmt.

Wie auch die Hilfskostenstellen haben auch allgemeine Kostenstellen *keinen Zuschlagssatz*, weil sie *keine Einzelkosten* besitzen. Wie die Hilfskostenstellen müssen daher auch die allgemeinen Kostenstellen innerbetrieblich auf Hauptkostenstellen abgerechnet werden, um Vollkostendeckung zu erreichen.

Diese Abrechnung ist Gegenstand des vorliegenden Manuskriptes.

## 3. Verfahren der Kostenumlagerechnung

Verfahren, die Kosten auf Kostenstellen verteilen, sind Verfahren der *Kostenumlagerechnung*. Nur diese werden in diesem Skript betrachtet; Auswertungsverfahren wie die Zuschlags- oder die Stundensatzrechnung werden nicht untersucht (dafür gibt es ein anderes Skript).

Grundsätzlich unterscheidet man die Primär- und die Sekundärkostenumlage:

- die Primärkostenumlage verteilt die Kosten der Kostenartenrechnung auf die Kostenstellen;
- die Sekundärkostenumlage verteilt die Kosten der allgemeinen- und der Hilfskostenstellen auf die Hauptkostenstellen.

Die Primärkostenumlage bedient sich der Verrechnungsverfahren, die aus der Dreisatzrechnung abgeleitet werden und *unproblematisch* sind; die Sekundärkostenumlage ist interessanter, weil sie *eigene Schlüssel* und *eigene Umrechnungsverfahren* benötigt.

### 3.1. Allgemeine Umlagehierarchie

Da die allgemeinen Kostenstellen Kosten auf alle anderen Kostenstellen verrechnen, die Hilfskostenstellen jedoch ihre Kosten nur auf einzelne oder wenige Hauptkostenstellen, ist es meistens sinnvoll, *erst die allgemeinen- und dann die Hauptkostenstellen* abzurechnen.

Konkrete Rechenverfahren sind die Stufenleiter- und die simultane Abrechnungsmethode.

#	KostenΣ	Allgemeine- u. Hilfs-KSt.	Haupt-KSt. (z.B. Lager)	Haupt-KSt. (z.B. Produkt)	Hilfs-KSt. (z.B. ArbVorb)	Haupt-KSt. (z.B. Produkt)	Vertrieb	Verwaltung
1	Gesamtbetrag		Einzelkosten	Einzelkosten		Einzelkosten		
2	Gesamtbetrag	Primärgemeinkostenumlage: Verteilung der Kostengesamtsummen aufgrund von Verteilungsschlüsseln.						
3		↳	1. Sekundärkostenumlage: Verteilung der Summen der allgemeinen KSt. auf die anderen KSt.					
4					↳	2. SekUmlage		
5			GesamtΣ Zuschlagssatz	GesamtΣ Zuschlagssatz		GesamtΣ Zuschlagssatz	GesamtΣ Zuschlagssatz	GesamtΣ Zuschlagssatz

## Muster eines Betriebsabrechnungsbogen mit Stufenleiterverfahren

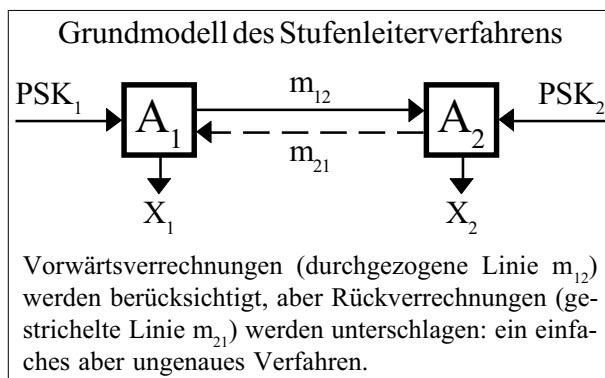
Nr.	Kostenart	Summe	Mengenverteilung							Allg. Kostenstellen			Hauptkostenstellen			
			W	K	R	H	P	V	V	Wache	Kantine	Reparatur	Hauptlager	Produktion	Verwaltung	Vertrieb
1	Fertigungsmaterial	330000,00										330000,00				
2	Fertigungslöhne	150000,00											150000,00			
3	Lohngemeinkosten	18000,00	2	1	2	4	12	2	6	1241,38	620,69	1241,38	2482,76	7448,28	1241,38	3724,14
4	Sozialkosten	60000,00	3	1	2	5	10	2	7	6000,00	2000,00	4000,00	10000,00	20000,00	4000,00	14000,00
5	Instandhaltung	10000,00	1	2	1	3	8	5	4	416,67	833,33	416,67	1250,00	3333,33	2083,33	1666,67
6	Energie	77000,00	2	4	2	3	20	3	5	3948,72	7897,44	3948,72	5923,08	39487,18	5923,08	9871,79
7	Kfz-Kosten	65000,00	8	0	1	12	2	15	22	8666,67	0,00	1083,33	13000,00	2166,67	16250,00	23833,33
8	Versicherungen	35000,00	2	3	1	32	15	4	10	1044,78	1567,16	522,39	16716,42	7835,82	2089,55	5223,88
9	Sonstiges	51000,00	2	5	2	12	28	5	3	1789,47	4473,68	1789,47	10736,84	25052,63	4473,68	2684,21
10	Kalk. AfA	22000,00	2	3	1	14	42	10	6	564,10	846,15	282,05	3948,72	11846,15	2820,51	1692,31
11	Kalk. Zins	12000,00	1	2	1	8	16	12	8	250,00	500,00	250,00	2000,00	4000,00	3000,00	2000,00
12	Summe GK 1	350000,00								23921,78	18738,46	13534,01	66057,81	121170,06	41881,54	64696,33
13	Umlage Wache	23921,78		1	1	12	25	6	3		498,37	498,37	5980,45	12459,26	2990,22	1495,11
14	Summe GK 2	350000,00									19236,83	14032,38	72038,26	133629,32	44871,76	66191,44
15	Umlage Kantine	19236,83			2	8	32	2	8			739,88	2959,51	11838,05	739,88	2959,51
16	Summe GK 3	350000,00										14772,26	74997,77	145467,37	45611,64	69150,96
17	Umlage Reparatur	14772,26				10	33	0	2				3282,72	10832,99	0,00	656,54
18	Summe GK 4	350000,00											78280,50	156300,36	45611,64	69807,50
19	Gesamtkosten	830000,00											408280,50	306300,36	45611,64	69807,50
20	HKU														740580,86	
21	Ist-Zuschlagssätze												23,7214%	104,2002%	6,1589%	9,4260%

Sonstige Informationen:		Wert	BestÄnd
Lager Halbprodukte	Anfangsbestand bei Eröffnung:	45000,00	-20000,00
	Endbestand bei Abschluß:	25000,00	
Lager Fertigprodukte	Anfangsbestand bei Eröffnung:	66000,00	-6000,00
	Endbestand bei Abschluß:	60000,00	

### 3.2. Konkrete Abrechnungsverfahren

#### 3.2.1. Das Stufenleiterverfahren

Ein einfaches Abrechnungsverfahren besteht in der Vorwärtsverrechnung aller allgemeinen- und Hilfskostenstellen unter *Vernachlässigung der Rückverrechnungen*. Nach jeder einzelnen Verrechnungsstufe ist eine Zwischensumme zu bilden. Da sich auf diese Art ein treppen- oder stufenartiges Rechenschema ergibt, spricht man auch von der sogenannten *Treppenumlage* oder vom *Stufenleiterverfahren*. Dieses Verfahren kann folgendermaßen modelliert werden:



Im obigen BAB kommen die allgemeinen Kostenstellen *Wache*, *Kantine* und *Reparatur* vor.

Die Summe der direkt der Wache zugeordneten Kosten betragen 23921,78 €. Diese Summe wird in Zeile 13 des BAB nach einem Verrechnungsschlüssel auf die anderen Kostenstellen übertragen. Dadurch wird die Wache abgerechnet.

Die Kosten der Kantine betragen 18738,46 €, plus die von der Wache empfangene Leistung im Wert von 498,37 €. Insgesamt ist die Kantine also 19236,83 € wert. Diese Summe wird ebenfalls auf die nachfolgenden Kostenstel-

len verrechnet, aber nicht zurück an die Wache. Die Kosten der Leistung der Kantine an die Wache wird also *vernachlässigt*.

Die Reparaturkostenstelle schließlich verursacht zunächst Kosten in Höhe von 13534,01 €, zu denen aber noch 498,37 € Leistung der Wache und 739,88 € Leistung der Kantine hinzukommen. Insgesamt verrechnet die Reparatur also eine Kostensumme von 14772,26 € auf den Rest des Betriebes.

Rückverrechnungen, d.h., eine Leistung der Reparatur an die Wache und die Kantine oder eine Leistung der Kantine an die Wache, werden vernachlässigt. Das macht das Rechenverfahren *einfach*, aber *ungenau*.

Um die systemimmanente Ungenauigkeit zu reduzieren, sollte bei Anwendung des Stufenleiterverfahrens eine Anordnung der Kostenstellen gewählt werden, in der möglichst wenig tatsächliche (und durch das System dann vernachlässigte) Rückleistungen vorkommen.

Die Summe der Gemeinkosten in Zeile 12 des vorstehenden Beispiels („GK 1“) heißt auch *Primärgemeinkosten*, weil sie durch die *Primärverrechnung* in den Zeilen 3 bis 11 entstanden sind. Die in den Zeilen 13, 15 und 17 verrechneten Umlagen heißen auch *Sekundärgemeinkosten*, weil sie erst im Wege einer *innerbetrieblichen Leistungsverrechnung* den Kostenstellen zugeordnet worden sind.

Die Gemeinkostensumme in Zeile 18 („GK 4“) enthält die *Summe aller Gemeinkosten der Hauptkostenstellen*. In dieser Zeile kommen keine allgemeinen- oder Hilfskostenstellen mehr vor. Die Summe GK 4 eignet sich also zur Anwendung der vorstehenden Zuschlagsformeln. Die Zuschlagssätze in Zeile 21 weisen also die zur Erzielung einer Vollkostendeckung erforderlichen Höhe auf. Auch in den Herstellkosten des Umsatzes sind die Sekundärgemeinkosten enthalten.

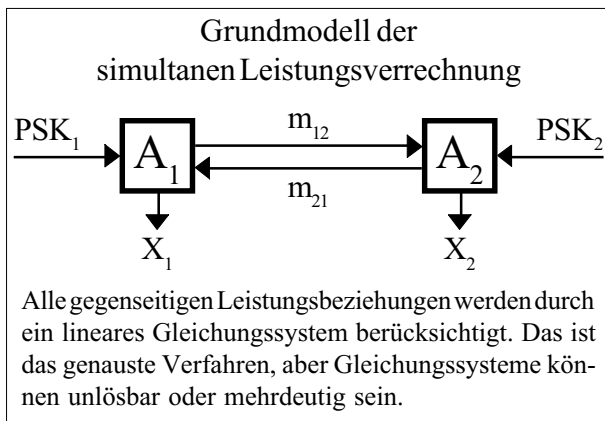
Muster eines Betriebsabrechnungsbogen mit simultaner Leistungsverrechnung

Nr.	Kostenart	Summe	Mengenverteilung					Allg. Kostenstellen		Hauptkostenstellen				
			K	R	L	P	V	V	Kantine	Reparatur	Lager	Produktion	Verwaltung	Vertrieb
1	Fertigungsmaterial	160000,00								160000,00				
2	Fertigungslöhne	112000,00								112000,00				
3	Lohngemeinkosten	20000,00	2	3	5	18	3	4	1142,86	1714,29	2857,14	10285,71	1714,29	2285,71
4	Sozialkosten	43000,00	3	6	3	21	2	3	3394,74	6789,47	3394,74	23763,16	2263,16	3394,74
5	Instandhaltung	18000,00	1	1	8	11	1	5	666,67	666,67	5333,33	7333,33	666,67	3333,33
6	Energie	45000,00	40	8	16	188	12	51	5714,29	1142,86	2285,71	26857,14	1714,29	7285,71
7	Kfz-Kosten	54000,00	1	12	7	66	31	74	282,72	3392,67	1979,06	18659,69	8764,40	20921,47
8	Versicherungen	20000,00	0,05	0,05	0,2	0,55	0,05	0,1	1000,00	1000,00	4000,00	11000,00	1000,00	2000,00
9	Sonstiges	30000,00	3	1	3	24	5	3	2307,69	769,23	2307,69	18461,54	3846,15	2307,69
10	Kalk. AfA	14000,00	0,08	0,1	0,18	0,5	0,04	0,1	1120,00	1400,00	2520,00	7000,00	560,00	1400,00
11	Kalk. Zins	10000,00	0,08	0,1	0,16	0,48	0,06	0,12	800,00	1000,00	1600,00	4800,00	600,00	1200,00
12	Summe GK 1	254000,00							16428,96	17875,18	26277,68	128160,57	21128,95	44128,66
13	Gesamtkosten 1	526000,00							16428,96	17875,18	186277,68	240160,57	21128,95	44128,66
14	Umlage Kantine	16402,46		120	65	1450	320	456			465,37	10381,30	2291,05	3264,74
15	Umlage Reparatur	17901,69	20		140	220	10	60			5828,46	9159,00	416,32	2497,91
16	Summe GK 2	254000,00									32571,50	147700,88	23836,31	49891,31
17	Gesamtkosten 1	526000,00									192571,50	259700,88	23836,31	49891,31
18	HKU	462272,38									462272,38			
19	Ist-Zuschlagssätze										20,3572%	131,8758%	5,1563%	10,7926%
20	Soll-Gewinn	52600,00									19257,15	25970,09	2383,63	4989,13
21	Soll-Umsatz	578600,00									211828,65	285670,97	26219,94	54880,44

Sonstige Informationen:		Wert	BestÄnd
Lager Halbprodukte	Anfangsbestand bei Eröffnung:	16000,00	
	Endbestand bei Abschluß:	12000,00	-4000,00
Lager Fertigprodukte	Anfangsbestand bei Eröffnung:	45000,00	
	Endbestand bei Abschluß:	39000,00	-6000,00

3.2.2. Die simultane Leistungsverrechnung

In der simultanen Leistungsverrechnung werden vor- und rückwärtsgerichtete innerbetriebliche Leistungsverrechnungen *simultan erfaßt*. Eine Vernachlässigung von Rückverrechnungen findet also *nicht* mehr statt. Das Verfahren arbeitet daher exakt, ist jedoch *mathematisch aufwendiger*, und enthält eine Anzahl mathematischer Probleme. Es kann mit folgendem Modell beschrieben werden:



Die *Kosten der allgemeinen Kostenstellen* ermitteln sich also folgendermaßen:

$$GSK_1 = PSK_1 + m_{21}q_2$$

$$GSK_2 = PSK_2 + m_{12}q_1$$

Für die *innerbetrieblichen Verrechnungspreise* gilt:

$$q_1 = \frac{PSK_1 + m_{21}q_2}{m_1 - m_{12}} \quad \text{und} \quad q_2 = \frac{PSK_2 + m_{12}q_1}{m_2 - m_{21}}$$

Wir haben es also offensichtlich mit einem *linearen Gleichungssystem* zu tun.

Betrachten wir den vorstehenden BAB. Wir betrachten die Kantine als  $A_1$  und die Reparaturkostenstelle als  $A_2$ . Es gilt dann:

$$GSK_1 = 16428,96 + 20q_2$$

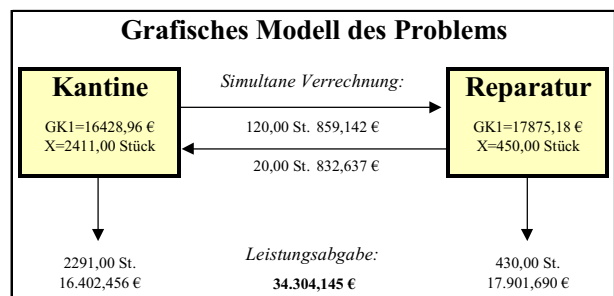
$$GSK_2 = 17875,18 + 120q_1$$

Für die Stückpreise der Leistung können wir feststellen:

$$q_1 = \frac{16429,96 + 20q_2}{2291}$$

$$q_2 = \frac{17875,18 + 120q_1}{430}$$

Die Kostensumme der beiden allgemeinen Kostenstellen „Kantine“ und „Reparatur“ beträgt hierbei 34304,15 €. Es muß auch genau diese Summe weiterverrechnet werden. Summiert man die weiterverrechneten Kosten in den Zeilen 14 und 15 des vorstehenden BAB so stellt man fest, daß auch genau diese Summe auf die Hauptkostenstellen weitergegeben wird. Das System rechnet also richtig.



Insgesamt gibt es zwei grundsätzliche Lösungsverfahren: Das Gleichungsverfahren und die Matrizeninversion. Das Gleichungsverfahren eignet sich ausschließlich für Probleme mit zwei allgemeinen Kostenstellen. Es ist daher *in der Praxis nicht anwendbar*. Wir betrachten es aber dennoch, weil es *einfach* und *leichter durchschaubar* ist. Der Lösungsweg über die Matrizenrechnung hingegen ist *ausschließlich mit Computerunterstützung* möglich und wesentlich rechenaufwendiger, kennt dafür aber keine Beschränkung der Zahl der Kostenstellen.

### 3.2.2.1. Die Lösungsmethode mit dem Gleichungsverfahren

Zunächst modellieren wir das grundsätzliche Problem folgendermaßen:

$$(1) \quad 241 q_1 = 16428,96 + 20q_2$$

$$(2) \quad 450q_2 = 17875,18 + 120q_1$$

Nunmehr stellen wir die Gleichungen so um, daß gleiche Faktoren übereinander zu stehen kommen und die Konstanten alleine auf einer Seite erscheinen:

$$(3) \quad 16428,96 = 241 q_1 - 20q_2$$

$$(4) \quad 17875,18 = -120q_1 + 450q_2$$

Man kann die Gleichungen auflösen, indem man eine der beiden Gleichungen mit einem *Faktor* multipliziert, der genau so bemessen sein muß, daß nach der Multiplikation zwei übereinanderstehende Glieder einander aufheben. Auf diese Art kann eine der beiden Unbekannten eliminiert werden, so daß die andere Unbekannte ausgerechnet werden kann.

**Lösungsvariante für  $q_2$ :** Wenn man Gleichung (3) mit dem *Faktor* 22,5 multipliziert, dann erhält man:

$$(5) \quad 369651,63 = 54247,5q_1 - 450q_2$$

Addiert man nunmehr die Gleichungen (4) und (5), so erhält man:

$$(6) \quad 387526,81 = 54127,5q_1$$

Man kann nunmehr berechnen:

$$(7) \quad q_1 = 7,159518$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in eine der anderen Gleichungen erhält man schließlich:

$$(8) \quad q_2 = 41,631836$$

**Lösungsvariante für  $q_1$ :** Dieses Lösungsverfahren funktioniert stets für beide Gleichungen. Wenn man beispielsweise Gleichung (4) mit dem *Faktor* 20,091666666667 multipliziert, so erhält man:

$$(9) \quad 359142,24 = -241 q_1 + 9041,25q_2$$

Aufgrund dieses Ergebnisses kann man Gleichung (9) mit Gleichung (3) addieren zu:

$$(10) \quad 375571,2 = 9021,25q_2$$

Dieses Ergebnis läßt sich wiederum zu den vorstehenden Resultaten auflösen.

Diese Methode kann mit einem entsprechenden Programmieraufwand auch in einem Tabellenkalkulationsprogramm automatisiert werden. Das sieht folgendermaßen aus:

Lösungsweg 1: Gleichungsverfahren			
<b>Variante Nr. 1: Gleichungsverfahren mit Multiplikator <math>q_1</math>:</b>			
(1)	2411,00 $q_1$ =	16.428,96 € +	20,00 $q_2$
(2)	450,00 $q_2$ =	17.875,18 € +	120,00 $q_1$
(3)	16.428,96 € =	2411,00 $q_1$ +	-20,00 $q_2$
(4)	17.875,18 € =	-120,00 $q_1$ +	450,00 $q_2$
	<b>Multiplikator für <math>q_1</math>:</b>	<b>20,091666667</b>	
(5)	359.142,24 € =	-2411,00 $q_1$ +	9041,25 $q_2$
(6)	375.571,20 € =	0,00 $q_1$ +	9021,25 $q_2$
(7)	$q_2$ =		41,63183621103 €/St.
(8)	$q_1$ =		7,15951800536 €/St.
<b>Variante Nr. 2: Gleichungsverfahren mit Multiplikator <math>q_2</math>:</b>			
(1)	2411,00 $q_1$ =	16.428,96 € +	20,00 $q_2$
(2)	450,00 $q_2$ =	17.875,18 € +	120,00 $q_1$
(3)	16.428,96 € =	2411,00 $q_1$ +	-20,00 $q_2$
(4)	17.875,18 € =	-120,00 $q_1$ +	450,00 $q_2$
	<b>Multiplikator für <math>q_2</math>:</b>	<b>22,500000000</b>	
(5)	369.651,63 € =	54247,50 $q_1$ +	-450,00 $q_2$
(6)	387.526,81 € =	54127,50 $q_1$ +	0,00 $q_2$
(7)	$q_2$ =		41,63183621103 €/St.
(8)	$q_1$ =		7,15951800536 €/St.

### 3.2.2.2. Die Lösungsmethode mit der Matrizeninversion

Das vorstehend beschriebene Verfahren hat den wesentlichen Nachteil, in der Regel nur anwendbar zu sein, wenn *lediglich zwei Kostenstellen* einander Leistungen verrechnen. In der Praxis hat man es aber mit wesentlich mehr Kostenstellen zu tun. Ferner ist das Gleichungsverfahren *schwer programmierbar*.

Lösungswege, die sich der Matrizenrechnung bedienen, sind auf Tabellenkalkulationsprogrammen und in Programmiersprachen jedoch wesentlich *leichter programmtechnisch aufzuführen*.

Der Verfasser verfügt über Erfahrungen mit Gleichungssystemen mit mehreren hundert Kostenstellen. In jedem Fall war hierfür *ausschließlich* die Inversionsmethode anzuwenden.

Zur Lösung mit Hilfe der Matrizeninversion schreiben wir das vorstehende Problem zunächst als *Matrix*:

$$\begin{pmatrix} 2411 & -20 \\ -120 & 450 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16428,96 \\ 17875,18 \end{pmatrix}$$

Zur *Inversion* wird die Ausgangsmatrix nunmehr zunächst um eine *Einheitsmatrix* erweitert:

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 2411 & -20 & 1 & 0 \\ -120 & 450 & 0 & 1 \end{array} \right)$$



Die Matrizeninversion besteht im wesentlichen darin, die Einheitsmatrix in der rechten Hälfte des Ausgangstableaus auf die linke Seite zu bringen. Hierfür sind nur Zeilen- und Spaltenoperationen erlaubt. Die nach dieser Operation auf der rechten Seite stehenden Zahlen sind die Inverse der Ausgangsmatrix.

Alle Zeilenoperationen sind zunächst stets auf die gesamte Zeile anzuwenden. Spaltenoperationen bestehen immer darin, Vielfache einer Zeile von einer anderen zu subtrahieren oder zu einer anderen zu addieren. Die Vorgehensweise ist also zunächst spalten- und dann zeilenweise. Ziel ist es, in jeder Spalte der Ausgangsmatrix Einheitsvektoren zu erzeugen, und zwar immer von links nach rechts. Ein Einheitsvektor ist dabei als eine Spalte definiert, in der genau eine 1 und ansonsten nur Nullen vorkommen, wobei die Lage der 1 egal ist:

Beispiele für Einheitsvektoren:	Keine Einheitsvektoren sind:																		
<table border="0"> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> </table>	1	0	0	0	1	0	0	0	1	<table border="0"> <tr><td>0</td><td>4</td><td>-9</td></tr> <tr><td>0</td><td>5</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> </table>	0	4	-9	0	5	0	0	0	1
1	0	0																	
0	1	0																	
0	0	1																	
0	4	-9																	
0	5	0																	
0	0	1																	

Die Einsen müssen dabei von links oben nach rechts unten in der linken Matrix erscheinen, ganz so wie im Beispiel oben links gezeugt. Da die Matrix eines Gleichungssystems aus einem Betriebsabrechnungsbogen stets quadratisch ist, weil sie immer so viele Variablen wie Gleichungen besitzt, ist die erste Stelle links oben und die letzte rechts unten immer mit einer Eins besetzt. Die diagonale „Achse“ mit Einsen zwischen diesen beiden Enden der Matrix heißt auch Hauptdiagonale.

Für jede Spalte der Ausgangsmatrix sind dabei jeweils von links nach rechts die folgenden Rechenschritte durchzuführen:

1. Zunächst ist die Zeile, in der das Pivot-Element stehen soll, durch den numerischen Wert des Pivot-Elementes zu teilen, was an der Stelle, an der die 1 stehen soll, ebendiese 1 erzeugt.
2. Anschließend sind alle anderen Zeilen mit einem solchen Vielfachen des Pivot-Element zu multiplizieren, daß der in der bearbeiteten Spalte erhaltene Wert genau dem Wert an der Stelle entspricht, in der die null erzeugt werden soll. Die anderen Zahlen der Ausgangstabelle in der Spalte, in der die Nullen erzeugt werden sollen, sind also Multiplikatoren für die Eins.
3. Schließlich ist die multiplizierte Zeile von der ursprünglichen Zeile zu subtrahieren, so daß an der jeweils angestrebten Stelle über oder unter der Eins eine Null erscheint.

Das mag als Zumutung erscheinen, ist aber mit ein bißchen Übung ganz einfach. Folgendermaßen sieht das in unserem Rechenbeispiel aus. In der Ausgangsmatrix

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 2411 & -20 & 1 & 0 \\ -120 & 450 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

ist zunächst in der ersten Spalte ein Einheitsvektor zu erzeugen. Zu diesem Zweck muß in der linken, oberen Exke eine 1 produziert werden, indem man die gesamte erste Zeile durch 2411 dividiert. Anschließend ist an der darunterstehenden Stelle eine null zu produzieren, indem man das 120-fache der neuen ersten Zeile (und damit auch das 120-fache der zuvor gewonnenen Eins!) von der alten zweiten Zeile subtrahiert. Man erhält damit:

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & -0,008295313 & 0,000414766 & 0 \\ 0 & 449,0045624 & 0,049771879 & 1 \end{array} \right)$$

Anschließend ist in der unteren, rechten Ecke zu beginnen. Dort produziert man eine 1, indem man die gesamte zweite Zeile durch 449,0045624 dividiert. Anschließend multipliziert man diese neue zweite Zeile mit -0,008295313 und zieht das Multiplikationsergebnis von der ersten Zeile ab, so daß über der 1 eine 0 entsteht. Das ergibt folgendes Ergebnis:

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0,000415685 & 0,000018474897 \\ 0 & 1 & 0,000110849 & 0,002227149 \end{array} \right)$$

Die Einheitsmatrix ist nunmehr in der linken Seite erschienen, und die Zahlen in der rechten Hälfte des Systems sind die Inverse der Ausgangsmatrix. Aus diesen Daten kann nunmehr eine Lösung berechnet werden, indem man die Zahlen der Einheitsmatrix zeilenweise mit den Kostensummen multipliziert, und die Ergebnisse aufaddiert. Für q<sub>1</sub> ergibt sich:

$$0,000415685 * 16428,96 = 6,829275815$$

$$0,00001847489723 * 17875,18 = 0,33024219$$

$$q_1 = 6,829275815 + 0,33024219 = 7,159518$$

Ebenso ist zu verfahren, um den anderen Verrechnungspreis zu ermitteln.

Dieses Verfahren ist zwar rechenaufwendig, aber dafür leicht in Tabellenkalkulationsprogrammen oder Programmiersprachen zu fassen. So sieht eine Musterlösung für Microsoft® Excel® aus:

Lösungsweg 2: Matrizeninversion					
<b>Ausgangsmatrix</b>		<i>i</i>	<i>j</i>		
<i>i</i>		2411	-20	q <sub>1</sub>	16.428,96 €
<i>j</i>		-120	450	q <sub>2</sub>	17.875,18 €
<b>Inversion:</b>		<i>i</i>	<i>j</i>		
<i>i</i>		2411	-20		
<i>j</i>		-120	450		
<b>1. Iteration:</b>		<i>i</i>	<i>j</i>		
<i>i</i>		1	-0,008295313		
<i>j</i>		0	449,0045624		
<b>2. Iteration:</b>		<i>i</i>	<i>j</i>		
<i>i</i>		1	0		
<i>j</i>		0	1		
<b>Lösung:</b>		q <sub>1</sub> =	6,829275815	0,33024219	7,1595180053574 €/St.
		q <sub>2</sub> =	1,821140217	39,81069599	41,6318362110261 €/St.

### 3.2.2.3. Probleme des Matrizenverfahrens

Gleichungssysteme können *unlösbar* oder *mehrdeutig* sein.

*Unlösbarkeit* entsteht, wenn in der Hauptdiagonale eine 0 steht oder während der Rechnung erscheint, und daher keine Division zur Erzeugung einer 1 möglich ist. Diese Situation entsteht, wenn *gleiche Verteilungsschlüssel mehrfach verwendet* werden. Im Matrixsystem sind also *alle Verteilungsschlüssel nur einmal anwendbar*. Das ist ein *großer Nachteil*, weil in großen Betrieben stets viel weniger Verteilungsschlüssel als Kostenstellen vorhanden sind.

Allgemeines Kriterium ist die *Unabhängigkeit der Linearvektoren*. Hierunter versteht man, daß die Quotienten, die sich ergeben, wenn man die jeweils korrespondierenden Elemente zweier Vektoren durcheinander dividiert, nicht gleich sein dürfen.

Werden zwei Kosten auf fünf Kostenstellen nach m<sup>2</sup> verteilt, und betragen diese m<sup>2</sup>-Zahlen

	Wache	EWerk	Arzt	Mensa	TQM
Verteilung 1	19	45	5	60	22
Verteilung 2	19	45	5	60	22

so sind die beiden Verteilungsschlüssel *voneinander abhängige Linearvektoren*, weil der zwischen ihnen bestehende Quotient stets 1 ist. Multipliziert man eine Zeile mit einem willkürlichen Wert, so erhält man zwar andere Zahlen, aber immer noch abhängige Vektoren:

	Wache	EWerk	Arzt	Mensa	TQM
Verteilung 1	19	45	5	60	22
Verteilung 2	38	90	10	120	44

in diesem Fall wäre der Quotient *stets 2*. Es könnte also bei der Verrechnung der Kosten immer noch zu Unlösbarkeiten kommen. Diesem Problem kann man *ausschließlich und nur* durch die Wahl *voneinander unabhängiger Schlüssel* ausweichen, etwa wenn man eine Kostenstelle nach m<sup>2</sup> und die andere nach Arbeitsstundenzahl abrechnet:

	Wache	EWerk	Arzt	Mensa	TQM
Verteilung 1	19	45	5	60	22
Verteilung 2	292	388	126	315	411

In diesem Fall ergäbe sich für jede Spalte ein anderer Quotient, d.h., die beiden Vektoren sind *voneinander unabhängig*.

Dummerweise fehlt es meist an ausreichend vielen Schlüsseln, um das bei beispielsweise mehreren hundert Ko-

stenstellen auch wirklich durchzuführen. In großen Betrieben sind daher allgemeine Kostenstellen zu *Gruppen zusammenzufassen*, und zwar nur jeweils die Kostenstellen mit gleichartigen Verteilungsschlüsseln, und nur innerhalb dieser Gruppen die summierten Kostenwerte zunächst mit einem Gleichungssystem zu verrechnen und anschließend wieder über ein eigenes Schlüsselverfahren zurückzuerrechnen. Diese Methode ist *aufwendig* und *verursacht Ungenauigkeiten*, ist aber oft die einzige Möglichkeit.

*Mehrdeutigkeit* heißt, daß mehrere Lösungen existieren. Bei inhomogenen linearen Gleichungssystemen kommen keine Mehrdeutigkeiten vor. Kostenstellenprobleme produzieren immer inhomogene Gleichungssysteme, so daß das Problem nicht betrachtet werden muß. In der Teilkostenrechnung ist jedoch vielfach mit Mehrdeutigkeit zu rechnen. Ein Lösungsmodell hierfür ist der *Simplex-Algorithmus* mit *Backtracking-Verfahren*.

### 3.3. Vergleich zwischen Simultan- und Stufenleiterverfahren

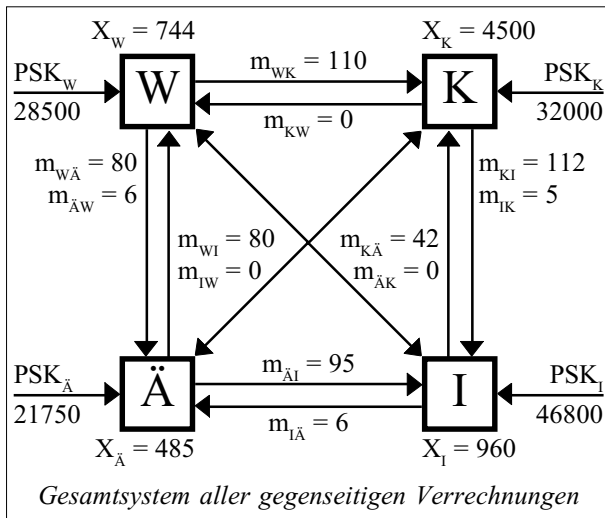
Aufgrund der oben beschriebenen Probleme ist das Stufenleiterverfahren immernoch eine Alternative. Ist eine mehrstufige Verrechnung zu *aufwendig*, zu *unsicher* und/oder *nicht erwünscht*, so kann stattdessen mit dem *Stufenleiterverfahren* eine Lösung herbeigeführt werden. Das Stufenleiterverfahren kennt *keine Situation der Unlösbarkeit*, ist also im Gegensatz zur Simultanverrechnung *stets sicher*.

Im Rahmen der Entscheidung über das gewählte Verfahren ist ein vorheriger *Vergleich* möglich. Dieser ergibt stets, daß die Ergebnisse des Stufenleiterverfahrens *um so besser* werden, *je geringere Rückverrechnungen* es enthält. Enthält ein Gleichungssystem überhaupt keine Rückverrechnungen, so produzieren beide Verfahren *identische Ergebnisse*; sind hingegen große Rückverrechnungen unvermeidlich, so sind die Ergebnisse des Stufenleiterverfahrens oft *sehr schlecht* oder *unbrauchbar*.

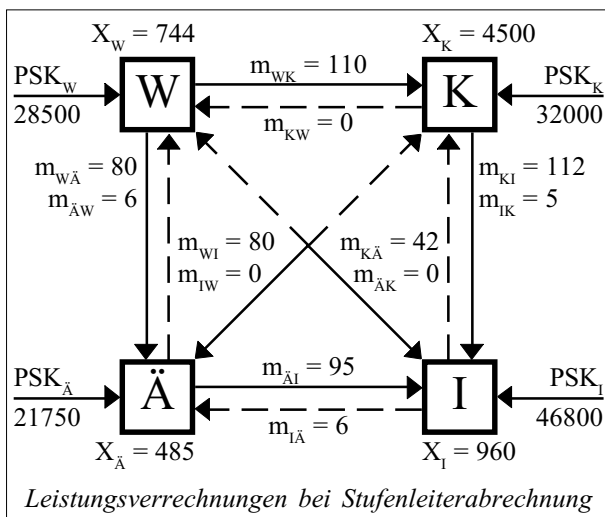
Auch hierzu betrachten wir ein *Beispiel*. In einem Betrieb gebe es vier allgemeine Kostenstellen, nämlich einen *Wachdienst*, eine *Kantine*, einen *ärztlichen Dienst* und eine *Instandhaltungsabteilung*. Wir bezeichnen diese der Einfachheit halber mit den Buchstaben W, K, Ä und I. Für jede dieser Kostenstellen sind die Gesamtleistung, die Primärgemeinkosten und die Leistungsverrechnung bekannt. Alle Kostenstellen können jeder anderen Kostenstelle Leistungen verrechnen. Insgesamt ergebe das das in der nachfolgenden Tabelle dargestellte Verrechnungsbild:

Kostenstelle:	Wachdienst	Kantine	Ärztl. Dienst	Instandhaltung
Gesamtleistung	744,00 Einh	4500,00 Einh	485,00 Einh	960,00 Einh
Primärgemeinkosten	28.500,00 €	32.000,00 €	21.750,00 €	46.800,00 €
Verrechnung an Wachdienst		0,00 Einh	6,00 Einh	0,00 Einh
Verrechnung an Kantine	110,00 Einh		0,00 Einh	5,00 Einh
Verrechnung an Ärztl. Dienst	80,00 Einh	42,00 Einh		6,00 Einh
Verrechnung an Instandhaltung	80,00 Einh	112,00 Einh	95,00 Einh	

Wollte man dieses Modell mit der simultanen Leistungsverrechnung berechnen, so ergäbe sich das folgende Bild der Leistungsbeziehungen:



Im Rahmen einer Stufenleiterabrechnung würden jedoch alle Rückverrechnungen vernachlässigt. Das würde die Berechnung auf die folgenden Leistungsbeziehungen beschränken:



Im Wege der Simultanverrechnung erhält man nunmehr folgende Ergebniswerte, die die wirklichen (exakten) Resultate repräsentieren:

Kostenstelle:	Wachdienst	Kantine	Ärztl. Dienst	Instandhaltung
Gesamtleistung	744,00 Einh	4500,00 Einh	485,00 Einh	960,00 Einh
Primärgemeinkosten	28.500,00 €	32.000,00 €	21.750,00 €	46.800,00 €
Verrechnung an Wachdienst		0,00 Einh	6,00 Einh	100,00 Einh
Verrechnung an Kantine	110,00 Einh		0,00 Einh	5,00 Einh
Verrechnung an Ärztl. Dienst	80,00 Einh	42,00 Einh		6,00 Einh
Verrechnung an Instandhaltung	80,00 Einh	112,00 Einh	95,00 Einh	

↑ Vorwärtsverrechnung ↓

Kostenstelle	Verrechnungspreis
Wachdienst .....	38,7311 €/Einh
Kantine .....	8,1225 €/Einh
Ärztlicher Dienst .....	52,6566 €/Einh
Instandhaltung .....	58,1360 €/Einh

Muß (oder soll) im Wege der Stufenleitermethode abgerechnet werden, so lautet die Lösung nur geringfügig anders:

Kostenstelle	Verrechnungspreis
Wachdienst .....	38,3065 €/Einh
Kantine .....	8,0475 €/Einh
Ärztlicher Dienst .....	51,8608 €/Einh
Instandhaltung .....	58,0131 €/Einh

In diesem Gleichungssystem sind die Rückverrechnungen weitgehen minimiert. Ändert sich das, entstehen jedoch erhebliche Unterschiede, die die Anwendung des Stufenleiterverfahrens praktisch verunmöglichen. Leistet die Instandhaltungskostenstelle beispielsweise 100 Einheiten an die Wache, so ist dies eine erhebliche Rückverrechnung. Das ändert die Ergebnisse der Simultanverrechnung ganz deutlich:

Kostenstelle	Verrechnungspreis
Wachdienst .....	46,6655 €/Einh
Kantine .....	8,3173 €/Einh
Ärztlicher Dienst .....	53,9923 €/Einh
Instandhaltung .....	58,9521 €/Einh

Aber die Zahlen des Stufenleiterverfahrens weichen hiervon jetzt erheblich ab:

Kostenstelle	Verrechnungspreis
Wachdienst .....	38,3065 €/Einh
Kantine .....	8,0475 €/Einh
Ärztlicher Dienst .....	51,8608 €/Einh
Instandhaltung .....	58,0131 €/Einh

In diesem Fall wäre eine Anwendung des Stufenleiterverfahrens vermutlich nicht mehr sinnvoll. Die Wahl des geeigneten Abrechnungsverfahrens ist also stets eine komplexe und verantwortungsvolle Entscheidung. Allgemeine Ratschläge sind zumeist unmöglich, weil keine allgemeingültigen Regeln existieren.